

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIA HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA POLÍTICA

BRUNO RODRIGUES PINHEIRO

VOX POPULI, VOX DEI:

Escolhas Sociais, Regras de Votação e Impossibilidades

BELO HORIZONTE

2018

BRUNO RODRIGUES PINHEIRO

Vox Populi, Vox Dei:

Escolhas Sociais, Regras de Votação e Impossibilidades

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência Política da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciência Política.

Área de Concentração: Instituições Políticas e Política Internacional

Orientador: Prof. Dr. Bruno Pinheiro
Wanderley Reis

BELO HORIZONTE

2018

320	Pinheiro, Bruno Rodrigues.
P654v	Vox populi, vox dei [manuscrito] : escolhas sociais, regras de
2018	votação e impossibilidades / Bruno Rodrigues Pinheiro. - 2018.
	124 f.
	Orientador: Bruno Pinheiro Wanderley Reis.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas.
	Inclui bibliografia.
	1.Ciência política - Teses. 2. Escolha social – Teses. 3. Votação – Teses. I. Reis, Bruno Pinheiro W. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. IV. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA POLÍTICA

UFMG

ATA DA DEFESA DA DISSERTAÇÃO DO ALUNO BRUNO RODRIGUES PINHEIRO

Realizou-se, no dia 16 de julho de 2018, às 09 horas, no Auditório Prof. Baesse da Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, da Universidade Federal de Minas Gerais, a defesa de dissertação, intitulada "*Vox Populi, Vox Dei: Escolhas Sociais, Regras de Votação e Impossibilidades*", apresentada por BRUNO RODRIGUES PINHEIRO, número de registro 2017698576, graduado no curso de CIÊNCIAS ECONÔMICAS, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em CIÊNCIA POLÍTICA, à seguinte Comissão Examinadora: Prof. Bruno Pinheiro Wanderley Reis - Orientador (DCP/UFMG), Prof. Felipe Nunes dos Santos (DCP/UFMG), Prof. Manoel Leonardo Wanderley Duarte Santos (DCP/UFMG).

A Comissão considerou a dissertação:

Aprovada

Reprovada

Finalizados os trabalhos, foi lavrada a presente ata que, lida e aprovada, vai assinada pelos membros da Comissão.

Belo Horizonte, 16 de julho de 2018.

Prof. Bruno Pinheiro Wanderley Reis

Orientador (DCP/UFMG)

Prof. Felipe Nunes dos Santos

(DCP/UFMG)

Prof. Manoel Leonardo Wanderley Duarte Santos

(DCP/UFMG)

Agradecimentos

À Universidade Federal de Minas Gerais. Agradeço pela acolhida. Em especial, agradeço ao Departamento de Ciência Política (DCP) e seu corpo docente pelo ambiente institucional favorável à pesquisa. Aos colegas do DCP-UFMG e do Centro de Estudos Legislativos (CEL). Agradeço pela receptividade e conversas.

Ao meu orientador, Prof. Bruno Reis. Sou grato pelas conversas, análise crítica e pela liberdade dada no desenvolvimento deste trabalho. Agradeço aos professores Felipe Nunes (UFMG) e Manoel Santos (UFMG) pelos comentários.

À minha namorada Magila. Agradeço o carinho e afeto. Em especial, agradeço o apoio irrestrito sobre minhas escolhas. Muito obrigado!

Ou se tem chuva e não se tem sol ou se tem sol e não se tem chuva! Ou se calça a luva e não se põe o anel, ou se põe o anel e não se calça a luva! Quem sobe nos ares não fica no chão, quem fica no chão não sobe nos ares. É uma grande pena que não se possa estar ao mesmo tempo em dois lugares! Ou guardo o dinheiro e não compro o doce, ou compro o doce e gasto o dinheiro. Ou isto ou aquilo: ou isto ou aquilo ... e vivo escolhendo o dia inteiro! Não sei se brinco, não sei se estudo, se saio correndo ou fico tranquilo. Mas não consegui entender ainda qual é melhor: se é isto ou aquilo.

Cecília Meireles (Ou isto ou aquilo)

"it would be helpful for the development of democratic theory if we could assume that some means exist for comparing intensities of preferences"

R. Dahl, 1956, p. 99

Choice is deliberate desire

Aristotle, Nicomachean Ethics,
Book 6

Resumo

A teoria da escolha social é o estudo sobre os processos e procedimentos de decisões coletivas visando compreender como uma coletividade (eleitores, legisladores, corte, comitê, etc.) pode representar uma preferência social tendo como base as preferências dos membros individuais. Numa democracia, a forma clássica de se realizar tal decisão é possibilitar que cada indivíduo possa expressar-se através do voto. Entretanto, em função da existência de distintas regras de votação, como saber, de fato, qual a escolha social? O objetivo dessa dissertação é fazer uma discussão entre a filosofia política normativa e a teoria da escolha social, tendo como foco os teoremas de impossibilidade de [Arrow \(1951\)](#), [Gibbard \(1973\)](#), [Satterthwaite \(1975\)](#) e [Sen \(1970\)](#). Para desenvolver o argumento, apresenta-se a teoria da escolha social em uma perspectiva histórica e os critérios normativos das distintas regras de votação, bem como os principais teoremas. Apesar de serem resultados normativos com conotações negativas, apresenta-se como resultado colateral a possibilidade de diálogo entre a teoria da escolha social e a teoria deliberacionista de democracia.

Palavras-chave: Escolha social, Regras de votação, Impossibilidades

Abstract

The social choice theory is the study of the processes and procedures of collective decisions aimed understanding how a community (voters, legislators, court, committee, etc.) can achieve social preference based on the preferences of individual members. In a democracy, the classic way of making such decision is to enable each individual to express himself through the vote. However, since there are different voting rules, how we might find out what the preferences of all citizens are? The aim of this dissertation to make an argument between the normative political philosophy and social choice theory focusing on the impossibility theorem of [Arrow \(1951\)](#), [Gibbard \(1973\)](#), [Satterthwaite \(1975\)](#) and [Sen \(1970\)](#). To develop the argument, we present the theory of social choice in a historical perspective and the normative criteria of both the different voting rules and the main theorems. Although they are normative results with negative connotations, presents here as a collateral result, possibility dialogue between the social choice theory and the deliberationist approach of democracy.

Keywords: Social choice, Voting rules, impossibility.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema de Votação - Blanquerna (1283)	40
Figura 2 – Extrato do livro Dodgson (1876)	45
Figura 3 – Ordenação das Preferências - I	95
Figura 4 – Ordenação das Preferências - II	97
Figura 5 – Ordenação das Preferências - III	98

Lista de tabelas

Tabela 1 – Distribuição das Preferências: Exemplo 1	20
Tabela 2 – Resultado da Eleição	20
Tabela 3 – Distribuição das Preferências: Exemplo 2	20
Tabela 4 – Resultado da Eleição	21
Tabela 5 – Sistema de Condorcet - Exemplo	42
Tabela 6 – Sistema de Condorcet - Resultado	42
Tabela 7 – Sistema de Condorcet - Exemplo II	42
Tabela 8 – Sistema de Condorcet - Resultado II	42
Tabela 9 – Sistema de Condorcet - Exemplo III	43
Tabela 10 – Sistema de Condorcet - Resultado III	43
Tabela 11 – Sistema de Borda - Exemplo	44
Tabela 12 – Sistema de Borda - Resultado	44
Tabela 13 – Sistema de Borda - Resultado II	44
Tabela 14 – Cédula Eleitoral - I	49
Tabela 15 – Cédula Eleitoral - II	49
Tabela 16 – Cédula Eleitoral - III	50
Tabela 17 – Cédula Eleitoral - IV	50
Tabela 18 – Unanimidade - Anonimato I	53
Tabela 19 – Unanimidade - Anonimato II	54
Tabela 20 – Unanimidade - Neutralidade I	54
Tabela 21 – Unanimidade - Neutralidade II	54
Tabela 22 – Unanimidade - Responsividade - I	54
Tabela 23 – Unanimidade - Responsividade II	55
Tabela 24 – Unanimidade - Decisividade I	55
Tabela 25 – Maioria Simples - Anonimato	56
Tabela 26 – Maioria Simples - Neutralidade	56
Tabela 27 – Maioria Simples - Responsividade	57
Tabela 28 – Maioria Simples - Decisividade	57
Tabela 29 – Maioria Qualificada - Anonimato	58
Tabela 30 – Maioria Qualificada - Neutralidade	58
Tabela 31 – Maioria Qualificada - Responsividade	59
Tabela 32 – Maioria Qualificada - Decisividade	59
Tabela 33 – Status-quo - Anonimato I	60
Tabela 34 – Status-quo - Anonimato II	60
Tabela 35 – Status-quo - Neutralidade I	60
Tabela 36 – Status-quo - Neutralidade II	61

Tabela 37 – Status-quo - Responsividade I	62
Tabela 38 – Status-quo - Responsividade II	62
Tabela 39 – Status-quo - Responsividade III	63
Tabela 40 – Status-quo - Decisividade I	63
Tabela 41 – Status-quo - Decisividade II	64
Tabela 42 – Votos Ponderados - Anonimato I	65
Tabela 43 – Votos Ponderados - Anonimato II	65
Tabela 44 – Votos Ponderados - Neutralidade I	65
Tabela 45 – Votos Ponderados - Responsividade I	65
Tabela 46 – Votos Ponderados - Responsividade II	66
Tabela 47 – Votos Ponderados - Responsividade	66
Tabela 48 – Ditadura - Anonimato I	67
Tabela 49 – Ditadura - Anonimato II	67
Tabela 50 – Ditadura - Neutralidade I	67
Tabela 51 – Ditadura - Neutralidade II	67
Tabela 52 – Ditadura - Responsividade I	68
Tabela 53 – Ditadura - Responsividade II	68
Tabela 54 – Ditadura - Decisividade	68
Tabela 55 – Resumo das Regras	68
Tabela 56 – Votação Pluralidade - Exemplo 1	72
Tabela 57 – Votação Pluralidade - Exemplo 2	72
Tabela 58 – Votação Pluralidade - Exemplo 3	73
Tabela 59 – Votação <i>Runoff</i> - Exemplo 1	73
Tabela 60 – Votação <i>Runoff</i> - Resultado Intermediário	73
Tabela 61 – Votação <i>Runoff</i> - Resultado Final	74
Tabela 62 – Votação <i>Runoff</i> - Exemplo 2	74
Tabela 63 – Votação <i>Runoff</i> - Resultado Intermediário 2	74
Tabela 64 – Votação <i>Runoff</i> - Resultado Final 2	74
Tabela 65 – Votação de <i>Condorcet</i>	75
Tabela 66 – Votação de <i>Condorcet</i> - Resultado	75
Tabela 67 – Votação de <i>Borda</i>	76
Tabela 68 – Votação de <i>Borda</i> - Resultado	76
Tabela 69 – Votação de <i>Borda</i> - Exemplo 2	76
Tabela 70 – Votação de <i>Borda</i> - Resultado Final	76
Tabela 71 – Votação de <i>Hare</i>	77
Tabela 72 – Votação de <i>Hare</i> - Resultado Parcial 1	77
Tabela 73 – Votação de <i>Hare</i> - Resultado Parcial 2	77
Tabela 74 – Votação de <i>Hare</i> - Resultado Final	78
Tabela 75 – Votação de <i>Coombs</i>	78

Tabela 76 – Votação de <i>Coombs</i> - Resultado Parcial 1	78
Tabela 77 – Votação de <i>Coombs</i> - Resultado Parcial 2	78
Tabela 78 – Votação de <i>Coombs</i> - Resultado Final	78
Tabela 79 – Resumo Completo das Distintas Regras	79
Tabela 80 – Exemplo de Votação	79
Tabela 81 – Resultado de Condorcet	80
Tabela 82 – Resultado de Borda	80
Tabela 83 – Pontos de Borda	80
Tabela 84 – Eliminação de Hare - I	81
Tabela 85 – Eliminação de Hare - II	81
Tabela 86 – Eliminação de Hare - III	81
Tabela 87 – Eliminação de Hare - IV	81
Tabela 88 – Eliminação de Coombs - I	82
Tabela 89 – Eliminação de Coombs - II	82
Tabela 90 – Eliminação de Coombs - III	82
Tabela 91 – Eliminação de Coombs - IV	82
Tabela 92 – Ordenação Completa das Preferências	85
Tabela 93 – Paradoxo de Condorcet	94
Tabela 94 – Resultado do Paradoxo de Condorcet	94

Lista de abreviaturas e siglas

A	Anonimato
D	Decisividade
I	Independência das Alternativas Irrelevantes
L	Liberalismo
L^*	Liberalismo Minimal
N	Neutralidade
N-D	Não-Ditador
P	Princípio Fraco de Pareto
S	Responsividade Positiva
U	Domínio Irrestrito

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	TEORIA DA ESCOLHA SOCIAL EM PERSPECTIVA HISTÓRICA	23
2.1	Utilitarismo, Agregação e Bem-Estar	23
2.1.1	Consequencialismo, Welfarismo e Ranking pela Soma	24
2.1.2	Utilidade Cardinal, Ordinal, Preferências e Escolhas	25
2.1.3	Bem-Estar Econômico e Princípio de Pareto	29
2.2	Procedimentos de Votação e Escolhas Sociais	32
2.2.1	Regras Eleitorais e Procedimentos de Votação em Perspectiva Histórica	32
2.2.2	História da Teoria da Escolha Social por seus Autores	36
2.3	Conclusões	46
3	CRITÉRIOS NORMATIVOS, REGRAS DE VOTAÇÃO E AGREGAÇÃO DE PREFERÊNCIAS	47
3.1	Princípios Normativos Gerais de uma Regra de Votação	48
3.1.1	Regras de Votação com duas alternativas	52
3.1.2	Regras de Votação com mais de duas alternativas	69
3.2	Várias regras, um único resultado?	79
3.3	Conclusões	82
4	TEOREMAS DE IMPOSSIBILIDADES: ARROW, GIBBARD-SATTERTHWAITE E SEN	84
4.1	Condições Normativas do Teorema de Arrow	85
4.1.1	Domínio Irrestrito	86
4.1.2	Princípio Fraco de Pareto	86
4.1.3	Independência das Alternativas Irrelevantes	87
4.1.4	Não-Ditador	87
4.1.5	Teorema de Arrow	87
4.1.6	Possíveis "rotas de fuga" da Impossibilidade de Arrow	89
4.2	Condições Normativas do Teorema Gibbard-Satterthwaite	104
4.3	Condições Normativas do Teorema de Sen	107
4.4	Conclusões	112
5	CONCLUSÃO	116

REFERÊNCIAS	118
--------------------	------------

1 Introdução

Indivíduos tomam decisões que dependem de uma série de fatores particular a cada um. Isoladamente, estas decisões podem ser simplesmente sobre o que vestir ou comer hoje à noite; em grupo, uma decisão coletiva necessita ser acordada (seja através de uma conversa, negociação, barganha etc.) para se chegar a um resultado. Caso não alcance este resultado por consenso, recorre-se a alguma forma de solução que possa agregar as múltiplas preferências individuais em um acordo coletivo. Historicamente, a forma mais simples de se resolver este problema de tomada de decisão coletiva é através do voto.

Decisões coletivas podem ser representadas desde coisas simples e rotineiras (onde jantar, o que vestir, etc.) às mais complexas (vários membros em um comitê, centenas de eleitores em um parlamento, milhões de pessoas numa eleição presidencial). Qualquer tipo de decisão coletiva requer, em certa medida, alguma regra ou procedimento para realizar tais agregações, identificando a escolha social.

Um dos problemas que emergem da necessidade de haver escolhas sociais baseadas em preferências individuais é que existem diferentes regras ou procedimentos, com distintas propriedades, que podem ser utilizadas para identificar a escolha social. Neste sentido, se cada regra pode gerar um resultado, como saber qual, de fato, é a escolha social que melhor caracteriza as preferências individuais?

No século XVIII, o Marquês de Condorcet, um filósofo e matemático francês, observou que em alguns casos, a regra de votação por maioria simples apresenta resultados indeterminados: qualquer proposta alternativa poderia ser batida por uma outra, conduzindo a uma impossibilidade decisória. Tal resultado ficou conhecido como *Paradoxo de Condorcet*. Na segunda metade do século XX, Kenneth Arrow demonstrou que tal problema é inescapável: independente da regra de votação e diante de certos princípios normativos básicos, sempre existirá uma impossibilidade ou ocorrências de impasses e inconsistências entre as escolhas individuais e a decisão coletiva. Entretanto, existiria uma saída para essas inconsistências e impasses: que a escolha social refletisse, exatamente, a preferência de uma única pessoa. Logo, teríamos um ditador! Este resultado ficou conhecido como *teorema da impossibilidade de Arrow*.

Ora, se não existe a possibilidade de se ter uma regra que, coerentemente, forneça agregação das preferências individuais, será que, pelo menos, as regras existentes estão imunes às manipulações ou comportamento estratégico? O *teorema de Gibbard-Satterthwaite* nos diz que não: todas as regras são manipuláveis e nenhuma regra está imune ao compor-

tamento estratégico dos agentes. Então, pelo menos, seria possível ter um regra de escolha social que respeite os direitos individuais e forneça um resultado coerente? O teorema de Amartya Sen nos diz que não, temos nova impossibilidade: *teorema da impossibilidade do liberal Paretiano*.

Diante de tantas impossibilidades, será que a democracia é uma forma problemática de se exercer a liberdade de escolha? Como determinar qual regra de votação seguir? Existe algum critério objetivo? Será que apenas nos restam a ditadura e o caos? Ora, se não se observa caos, porque tamanha estabilidade? Como sair desses paradoxos e dilemas políticos-morais? Em suma, o objetivo desse trabalho é apresentar a literatura sobre escolhas sociais e seus dilemas. Além disso, apresento as tentativas de superação dessas impossibilidades de se ter uma regra de votação que respeitem condições normativas mínimas de justiça, equidade e eficiência.

A partir dos resultados de Arrow (1951), o tema da impossibilidade da existência de um procedimento que agregue as preferências individuais em um resultado coletivo racional ganhou corpo e suscitou polêmicas sobre as possíveis interpretações que seus resultados podem dar à ideia de democracia. Para uns, os resultados de Arrow e suas derivações são meros resultados matemáticos, sem sentido prático; outros argumentam que tais resultados demonstram a superioridade da ideia de liberalismo democrático contra visões populistas, que imaginam existir legitimidade em conceitos vagos como *bem comum* ou *vontade geral*; outros acusam os teóricos da escolha social de serem defensores do individualismo e utilitarismo metodológico, pois não levam em consideração outras formas de organização política com ênfase na deliberação e discussão pública, métodos apropriados para legitimidade política.

O debate sobre o impacto da teoria da escolha social dentro da teoria democrática teve em Riker (1982) um ponto fundamental. Para este autor, qualquer tentativa de se ter um sistema democrático, baseado em votação, como forma de legitimidade da soberania popular é "*impossible, arbitrary and meaningless*". Segundo Riker (1982) "*political philosophers, engaged in the pursuit of justice, have ignored and neglected the theory of voting methods*". Entretanto, a compreensão dos resultados da escolha social não é consensual. O próprio Arrow (1974) afirmou na aula magna do prêmio Nobel que:

[...] The philosophical and distributive implications of the paradox of social choice are still not clear. Certainly, there is no simple way out. I hope that others will take this paradox as a challenge rather than as a discouraging barrier (ARROW, 1974, p. 253)

A análise de [Riker \(1982\)](#) sobre os impactos que a escolha social teve na discussão democrática suscitou fortes reações. Respostas vieram desde a centralidade da ideia de deliberação e discussão pública, que vêem o processo democrático para além da mera agregação de preferências ([HABERMAS, 1981](#)) à ideia pluralista feita por [Miller \(1983\)](#), afirmando que a existência de ciclos no processo de escolha, ao invés de ser negativo, é um resultado positivo para a estabilidade do sistema político, pois permite que minorias sejam respeitadas através do poder de veto. [Anderson \(1990\)](#) desenvolveu uma resposta rejeitando as ideias da escolha social, pois estas são sem validades empíricas e, assim, sem sentido prático ([ELSTER, 1998](#); [DRYZEK, 2000](#); [MACKIE, 2003](#)).

Essa interpretação de [Riker \(1982\)](#) fez com que surgissem *mais calor do que luz* sobre as reais possibilidades de diálogos entre a teoria da escolha social e as teorias democráticas. Houve uma incompreensão em entender que existem níveis distintos de análise: resultado teórico-normativo, que exige um nível de abstração e generalidade, não necessariamente corresponde a uma dada realidade concreta, efetiva. Dessa forma, a busca de validade empírica para uma proposição normativa-abstrata não implica na sua rejeição ou validação. Rejeita-se se forem encontradas contradições lógicas no seu discurso formal, dedutivo. Com isso, os desenvolvimentos da teoria da escolha social, neste particular, ajudam na construção do pensamento, nas consequências lógicas das regras de votação diante de estruturas de preferências individuais que são, por sua própria natureza, axiomáticas-formais. Logo, boa parte da crítica que se faz à escolha social deriva-se da confusão entre esses dois níveis de análises e a obra de [Riker \(1982\)](#) contribuiu para esta confusão.

O ponto de partida que se deve buscar, aqui, é a definição de democracia que [Dahl \(1956\)](#) apresentou no *Preface to Democratic Theory* como sendo um sistema que satisfaz os valores da soberania popular e igualdade política. Qual o significado formal dessas proposições? Será possível apresentá-las em termos axiomáticos? Existem outros princípios normativos básicos que qualquer regra de votação deva adotar para se caracterizar como, efetivamente, democrático? A possibilidade de se desenvolver uma articulação entre os aspectos normativos da filosofia política e a teoria da escolha social fundamenta-se, justamente, na derivação das consequências lógicas que tais princípios normativos exercem nas possibilidades das escolhas sociais. Dessa forma, discutem-se aqui as bases normativas (axiomas) de tais mecanismos agregativos, apresentando os resultados (teoremas) mais importantes.

Em um conto chamado *A Sereníssima República*, Machado de Assis relata a descoberta científica do Cônego Vargas sobre como organizar, politicamente, uma sociedade de aranhas. A primeira tarefa era organizar um sistema eleitoral. O procedimento adotado para ocupação dos cargos públicos foi o sorteio e não o sufrágio pois "[o sorteio] exclui os

desvarios da paixão, os desazos da inépcia, o congresso da corrupção e da cobiça". Diante da organização política dessa sociedade, emergiram quatro grupos distintos, que Machado de Assis assim caracteriza:

[...] como eles são principalmente geométricas, é a geometria que os divide em política. Uns entendem que a aranha deve fazer as teias com fios retos, é o partido retilíneo; - outros pensam, ao contrário, que as teias devem ser trabalhadas com fios curvos, - é o partido curvilíneo. Há ainda um terceiro partido, misto e central, com este postulado: - as teias devem ser urdidas de fios retos e fios curvos; é o partido reto-curvilíneo; e finalmente, uma quarta divisão política, o partido anti-reto-curvilíneo, que fez tábua rasa de todos os princípios litigantes, e propõe o uso de umas teias urdidas de ar, obra transparente e leve, em que não há linhas de espécie alguma. Como a geometria apenas poderia dividi-los, sem chegar a apaixoná-los, adotaram uma simbólica. Para uns, a linha reta exprime os bons sentimentos, a justiça, a probidade, a inteireza, a constância, etc., ao passo que os sentimentos ruins ou inferiores, como a bajulação, a fraude, a deslealdade, a perfídia, são perfeitamente curvos. Os adversários respondem que não, que a linha curva é a da virtude e do saber, porque é a expressão da modéstia e da humildade; ao contrário, a ignorância, a presunção, a toleima, a parlapatice, são retas, duramente retas. O terceiro partido, menos anguloso, menos exclusivista, desbastou a exageração de uns e outros, combinou os contrastes, e proclamou a simultaneidade das linhas como a exata cópia do mundo físico e moral. O quarto limita-se a negar tudo. (ASSIS, 1882, p. 787)

Como resultado dessa escolha procedimental, houve o surgimento de práticas oportunistas e de manipulações, levando-os a constantes mudanças nas regras do sorteio e a dificuldade em construir uma sociedade livre da corrupção. Qual a relação entre o conto e este trabalho? Imagine que, ao invés de adotar o sorteio como forma eleitoral, tivessem adotado o sufrágio universal entre as aranhas. O que poderia ter acontecido? Como temos quatro partidos (*partido retilíneo, curvilíneo, reto-curvilíneo e anti-reto-curvilíneo*), cada partido lança um candidato para participar da eleição. Denomine cada partido pelas letras A, B, C e D , respectivamente. Considere um eleitorado de 30 aranhas. Cada aranha tem sua relação ordenada de preferência onde $A \succ B$ significa que a aranha (eleitora) prefere o partido A ao B . Como Cônego Vargas é um homem da ciência e razão, ele escolhe a regra de maioria simples por ser de fácil assimilação. As preferências dos 30 eleitores podem ser vistas na tabel 1 a seguir:

Eleitores	Ranking	Eleitores	Ranking
3	$A \succ C \succ D \succ B$	2	$C \succ B \succ D \succ A$
6	$A \succ D \succ C \succ B$	5	$C \succ D \succ B \succ A$
3	$B \succ C \succ D \succ A$	2	$D \succ B \succ C \succ A$
5	$B \succ D \succ C \succ A$	4	$D \succ C \succ B \succ A$

Tabela 1 – Distribuição das Preferências: Exemplo 1

A regra da maioria simples observa quem teve mais votos, olhando apenas a primeira opção na escala de preferência. Assim, o resultado da votação será:

Total de Votos	Alternativa
9	A
8	B
7	C
6	D

Tabela 2 – Resultado da Eleição

Dessa forma, o candidato do *partido retilíneo* A é o vencedor com 9 votos e tem-se seguinte ordenação da votação: $A \succ B \succ C \succ D$.

O partido mais radical, o *anti-reto-curvilíneo* D, não achando justa a votação, solicita à comissão organizadora um novo pleito. O argumento é que, apesar do partido A ter tido maioria dos votos (30%), esse mesmo partido A é fortemente rejeitado pela ampla maioria dos eleitores, pois está em último no ranking de 21 eleitores (70%). O partido de oposição ao *retilíneo*, o *curvilíneo* B, resolve solicitar a realização de votação em dois turnos, com regra da pluralidade no primeiro e maioria simples no segundo. Dessa forma, quem for eleito terá legitimidade da maioria. O resultado, então, será vitória de B, pois todos que não têm a opção A em primeiro na sua escala de preferência, votará em B. Logo: $B \succ A$.

O partido D formou uma coalizão com o partido do centro C e resolve impugnar a eleição e propõe uma nova fórmula. Os partidos vencedores dos dois pleitos anteriores (A e B) não se preocupam em competir novamente, pois seus votos estão garantidos. Entretanto, o partido do centro, resolve se retirar do pleito, ficando com apenas três partidos na disputa. Nesta nova eleição, tem-se a seguinte situação (tabela 3), sem o partido C:

Eleitores	Ranking	Eleitores	Ranking
3	$A \succ D \succ B$	2	$B \succ D \succ A$
6	$A \succ D \succ B$	5	$D \succ B \succ A$
3	$B \succ D \succ A$	2	$D \succ B \succ A$
5	$B \succ D \succ A$	4	$D \succ B \succ A$

Tabela 3 – Distribuição das Preferências: Exemplo 2

Dessa forma, o resultado da eleição, por maioria simples será (tabela 4):

Total de Votos	Alternativa
9	A
10	B
11	D

Tabela 4 – Resultado da Eleição

Observe que temos outro partido vencedor e uma completa inversão da ordem da primeira votação: $D \succ B \succ A$. Antes, a alternativa D era a última opção, agora é a primeira...como assim?

O que esse exemplo hipotético sugere é que, mesmo mantendo constantes as preferências das aranhas (dos eleitores), *o resultado eleitoral pode refletir mais a escolha do procedimento do que as preferências dos eleitores*. Dessa forma, estudar os procedimentos e suas propriedades é fundamental para se ter clareza sobre como funciona uma regra eleitoral. A teoria da escolha social é, justamente, a área de estudo sobre esses processos e procedimentos de decisões coletivas. Enquanto tal, apresenta um conjunto amplo de modelos e resultados que relacionam os *inputs* individuais (votos, preferências, julgamentos e bem-estar) em *outputs* coletivos (votos, preferências, julgamentos e bem-estar).

A questão central é responder: *como um grupo de indivíduos escolhe um resultado vencedor partindo de um conjunto de opiniões individuais?* Quais são as propriedades das distintas regras/procedimentos do sistema de votação? Como uma coletividade (eleitores, legisladores, corte, comitê etc.) chega a uma preferência social coerente, tendo como base as preferências ou julgamentos dos membros individuais? Como podemos realizar um *ranking* de diferentes alternativas e chegar a uma ordem de bem-estar social mais elevada? A teoria da escolha social estuda essas questões, não apenas com exemplos, mas desenvolvendo modelos gerais, axiomáticos, postulando teoremas.

Além desta introdução, este trabalho está dividido em mais três partes. No segundo capítulo apresenta-se a teoria da escolha social em perspectiva histórica. Fundamentalmente, existem duas matrizes teóricas distintas sobre escolha social. A primeira, filosófica, tem suas raízes no utilitarismo e na discussão sobre como preferências individuais, representadas por utilidades, podem conduzir à utilidades coletivas, buscando formas de maximizar o bem-estar social. Daí, derivam-se discussões sobre utilidade cardinal e ordinal e os teoremas de bem-estar, tendo a ideia de ótimo de Pareto como um princípio normativo importante. A segunda matriz, não parte do utilitarismo em si, mas de uma discussão sobre práticas procedimentais de votação que apresentam preferências ordenadas em torno de escolhas eleitorais. Dessa forma, este capítulo explora as duas formas tradicionais de se agregar preferências: o mercado e a eleição (fórum). No terceiro capítulo apresenta-se

os princípios normativos básicos de uma regra democrática (anonimato, neutralidade, responsividade e decisividade) e algumas regras de votação (maioria simples, qualificada, dois turnos, ponderado, *status-quo* etc). Finaliza-se este capítulo com o importante teorema de May (1952). Na sequência, discute-se os teoremas de Arrow (1951), Gibbard (1973), Satterthwaite (1975) e Sen (1970) mostrando o que significa cada princípio normativo (axiomas) e qual a intuição de cada um. Além disso, apresentam-se as possibilidades de se escapar das impossibilidades. Como são resultados formais, baseados em axiomas, basta flexibilizar cada axioma que se tem uma saída da impossibilidade. Mas, o que significa flexibilizar um axioma? Por exemplo, será que a ideia de deliberação à la Habermas (1981) é normativamente incompatível com a ideia de flexibilizar e se ter domínio restrito de Arrow? Será que existe uma ponte entre uma ideia normativa e um axioma matemático? Tecnicamente, pode-se dizer que deliberação, no sentido habermasiano, é busca pelo consenso, ou seja, busca-se ter *single-peaked-preferences*? Por fim, finaliza-se a discussão, ressaltando as relações entre a teoria da escolha social e a filosofia política.

2 Teoria da Escolha Social em Perspectiva Histórica

O objetivo deste capítulo é apresentar as duas matrizes teóricas que contribuíram com o desenvolvimento da teoria da escolha social. De um lado, há uma perspectiva de representar o comportamento humano através de uma medida do auto-interesse, centrada na ideia de utilidade; de outro lado, há a ideia de discutir procedimentos práticos sobre regras de votação. Assim, observa-se uma discussão filosófica e uma discussão operacional que, de modo conjunto e independente, vão dar base para a teoria da escolha social.

Apesar de serem matrizes teóricas distintas, existem convergências entre elas a partir da noção de preferências. Para Sen (2017a, p.270) existem, pelo menos, três formas: (i) as preferências podem expressar os interesses individuais (David Hume, Jeremy Bentham e Jonh Stuart Mill) e busca pela maximização da utilidade individual; (ii) as preferências podem ser expressas na forma de votação ou cédulas eleitorais (Borda e Condorcet), representando, em alguma medida, a utilidade dos eleitores; (iii) preferências podem ser vistas como expressões de julgamentos morais e sentimentos individuais sobre a sociedade e coletividade (Adam Smith, Kant etc).

O capítulo está organizado em dois blocos. No primeiro, apresenta-se a ideia do utilitarismo e a construção do argumento em prol da utilidade cardinal como medida de bem-estar. Na sequência apresenta-se a crítica à operacionalização do conceito de cardinalidade das utilidades e a passagem para utilidade ordinal. Esta mudança marca a separação entre a *velha* e a *nova teoria de bem-estar*. No segundo bloco, apresentam-se as discussões sobre operacionalização de regras distintas de votação do ponto de vista histórico, mostrando que tais discussões caminharam passo-a-passo com a ideia de democracia.

2.1 Utilitarismo, Agregação e Bem-Estar

A compreensão sobre o comportamento humano apresenta-se como uma construção complexa que envolve entendimento sobre um ser-individual e um ser-social. Da junção entre essas duas características fundantes do que seria o comportamento humano, qual seja, a sociabilidade que deriva da individualidade e da experiência social, o ser humano se molda através de regras e instituições (formais e informais) que são compartilhadas entre seus pares, criando condições para avaliações sobre julgamentos morais. Ao longo do tempo, distintas correntes filosóficas surgiram tentando compreender esses comportamentos. Uma corrente filosófica, em especial, dialoga com a teoria da escolha social: o utilitarismo.

Em um primeiro momento, o utilitarismo pode ser entendido como um princípio da moralidade individual em que o uso da razão é suposto no processo de tomada de decisão. Racionalidade na tomada de decisão impõe certos princípios normativos sobre comportamento individual, centrado numa tentativa de satisfação plena dos desejos e da felicidade. Em suma, postula-se uma soberania das vontades e dos desejos individuais na tomada de decisão. Entretanto, o utilitarismo apresenta-se, também, como uma teoria da moralidade pública, pois parte da realização dessa satisfação plena dos desejos se dá através da realização conjunta. Dessa forma, como todos os indivíduos são portadores da razão, extrapola-se a soberania individual da busca da plena satisfação e da máxima felicidade, ao objetivo do comportamento da própria sociedade, em decidir o que seria moralmente bom ou não para a prosperidade social. Dessa forma, transforma a racionalidade individual em uma racionalidade pública.

Essa característica do utilitarismo como princípio normativo da busca da plena satisfação, centrado na noção de que as ações devem ser julgadas, exclusivamente, em termos das informações geradas pelas utilidades é conhecida na literatura como *welfarismo*. Entretanto, segundo Sen (2017b), o que caracteriza o utilitarismo não é apenas a ideia do *welfarismo* e sim um conjunto de três axiomas básicos: (i) consequencialismo; (ii) *welfarismo* e (iii) *ranking* através da soma. Na próxima seção analisa-se, sucintamente, cada um desses axiomas.

2.1.1 Consequencialismo, Welfarismo e Ranking pela Soma

O consequencialismo na filosofia moral é a visão de que a qualidade moral da ação é completamente determinada pelas consequências das ações, dadas as alternativas disponíveis para o agente. Neste sentido, como o objetivo da ação moral deve ser considerar a consequência da ação, tem-se a ideia de buscar o efeito máximo dessa ação. Intuitivamente, tem-se que a busca e produção do prazer é melhor que a dor. Essa conclusão, aparentemente, faz parecer ingênua a perspectiva da moral consequencialista. Entretanto, a determinação da ação dos agentes nessas condicionantes (comparação entre bem e mal que derivam da dicotomia prazer vs. dor) em associação com a perspectiva utilitarista fornece uma poderosa ferramenta para análise do comportamento e consequências das ações dos agentes, pois fornecem uma avaliação - moral - sobre o que deve ser feito.

Perceba que, analisar o comportamento moral, de acordo com as consequências da ação, significa dizer que os efeitos são relevantes para a avaliação moral. A perspectiva consequencialista afirma que somente os efeitos devem ser considerados (DRIVER, 2012, p.6). Entretanto, segundo Pettit (1993, p.13), não haveria uma incompatibilidade em se adequar aos dois objetos, pois: "*grosso modo, o consequencialismo é a teoria segundo a qual o modo de determinar se uma escolha específica é a correta para um agente consiste*

em observar as consequências da decisão, observar os efeitos relevantes da decisão no mundo".

Analiticamente, tais efeitos podem ser mensurados em termos de felicidade ou bem-estar. Dessa forma, pode-se dizer que a raiz filosófica do consequencialismo reside no hedonismo de Epicuro, pois a finalidade última de qualquer ser humano é a busca pelo prazer (bem) ao menor custo possível, dor (mal). Logo, em certa medida, esta perspectiva poderia ser reduzida a um comportamento egoísta de busca do auto-interesse. Entretanto, tal abordagem não é completa, haja vista que parte do desenvolvimento consequencialista se afasta do egoísmo, pois o utilitarismo (enquanto princípio normativo consequencialista) tem em suas raízes, também, a ideia de felicidade e bem-estar dos outros, através da promoção de reformas sociais que buscam uma certa ideia de benevolência universal. Autores como Bentham, Mill, Hume e Smith partilham dessa noção.

Para Bentham (1798) o comportamento moral adequado é a busca pelo aumento da felicidade para o maior número possível de pessoas. Na ausência de uma medida apropriada, poderia ser resumida em aumentar a *utilidade global*, que seria uma medida da virtude social derivada do comportamento individual. Mill (1861) via a utilidade numa perspectiva diferente, pois para ele existiam *distinções qualitativas* entre o que seria útil. Assim, forma-se uma perspectiva *subjetiva-psicológica* sobre o que seria a busca plena da satisfação, pois, distintas pessoas, em tese, teriam distintas sensações sobre diferentes coisas.

Assim, se distintas pessoas têm diferentes sensações sobre as coisas, como avaliar o ganho coletivo de uma ação, partindo de pessoas diferentes? A busca da máxima felicidade individual, representada pela maximização de sua utilidade, pode ser agregada? A solução desse problema recai, justamente, na forma funcional sobre como representar a função utilidade e como tratar a noção de comparabilidade dessas funções utilidades entre distintas pessoas. Dessa forma, o terceiro axioma do utilitarismo se apresenta: para sabermos se o resultado de uma ação moral causou impactos positivos ou negativos, bastaria comparar o somatório total das utilidades individuais. Assim, se o resultado da soma algébrica entre prazer e dor culminar com ganhos líquidos, teríamos um resultado moral positivo. Logo, o resultado moral de uma ação requer a necessidade de se somarem as utilidades dos indivíduos.

2.1.2 Utilidade Cardinal, Ordinal, Preferências e Escolhas

No primeiro capítulo do livro *An Introduction to the Principles of Morals and Legislation*, Bentham (1798) assim caracterizou suas ideias:

Nature has placed mankind under the governance of two sovereign masters, pain and pleasure. It is for them alone to point out what we ought to do, as well as to determine what we shall do. On the one hand the standard of right and wrong, on the other the chain of causes and effects, are fastened to their throne. [...] It is the greatest happiness of the greatest number that is the measure of right and wrong (BENTHAM, 1798, p.14).

Nos capítulos seguintes, ele demonstrou sua filosofia moral, com roupagem objetiva, pois existiria possibilidade de se mensurar o resultado de uma ação por meio da análise da utilidade. Assim, quatro sentimentos deve ser analisado:

Pleasures and the avoidance of pains, then, are the legislator's goals; so he ought to understand their value. Pleasures and pains are the instruments he has to work with, so he needs to understand their force, i.e. their value. To a person (considered by himself) the value of a pleasure or pain (considered by itself) will be greater or less according to: (1) its intensity; (2) its duration; (3) its certainty or uncertainty; (4) its nearness or remoteness (BENTHAM, 1798, p.22).

Logo, como é possível mensurar a utilidade de acordo com esses quatro fatores, pode-se avaliar as consequências das ações, objetivamente. Dessa forma, abre-se o caminho para uma medida cardinal da utilidade individual. Assim, como é possível mensurar objetivamente a intensidade da utilidade de um indivíduo, pode-se mensurar o resultado coletivo das ações individuais por meio da agregação (soma) das utilidades individuais.

Por trás da possibilidade de se agregar os resultados individuais, reside a noção de comparabilidade das intensidades das utilidades. Se é possível medir as utilidades das pessoas, pode-se comparar os resultados das ações; podendo comparar os resultados das ações, pode-se afirmar qual será a mais adequada, qual seja, aquela que fornecer a maior utilidade global possível.

Tecnicamente, tanto Bentham (1798) quanto Mill (1861) acreditavam na noção de utilidade cardinal: uma expressão numérica que mensura o nível de satisfação de uma pessoa. Dessa forma, como a medida de bem-estar social é uma medida agregada do bem-estar individual, tem-se, formalmente, que:

$$W = f(w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$$

Onde W é a medida agregada de bem-estar, tendo como seus argumentos a medida de bem-estar da pessoa indexada pelo número 1 (w_1), o bem-estar da pessoa 2 (w_2) e assim sucessivamente, até a pessoa n (w_n). Como a medida de bem-estar (ou felicidade) corresponde à utilidade, pode-se reescrever a função como sendo:

$$W = g(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$$

Onde u_i corresponde à medida de utilidade de cada pessoa. A questão central do utilitarismo é como obter a função de bem-estar social (W). Formalmente, o problema se resumiria a encontrar as propriedades das funções f e g que possibilitasse maximizar seu valor. Como os primeiros teóricos do utilitarismo adotaram a ideia de utilidade cardinal, as expressões podem ser reescritas da seguinte forma:

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n$$

$$W = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

Logo, para sabermos o valor do bem-estar social, basta somar os valores individuais correspondentes. Por trás do pressuposto da cardinalidade da função de bem-estar reside a noção de comparabilidade entre as pessoas e, conseqüentemente, entre os estados do mundo. Assim, haverá como mensurar e comparar distintas ações. Dessa forma, o estado do mundo α_1 será escolhido em relação ao estado do mundo α_2 se, e somente se, a soma das utilidades individuais do primeiro estado for maior ou igual a outro estado:

$$\sum_1^n U_i(\alpha_1) \geq \sum_1^n U_i(\alpha_2)$$

Essa perspectiva de [Bentham \(1798\)](#) e [Mill \(1861\)](#) deu fundamento teórico ao surgimento da *Escola Marginalista* (neoclássica), tendo [Jevons \(1871\)](#), [Menger \(1871\)](#) e [Walras \(1874\)](#) como autores da primeira geração. Entretanto, apesar de compartilharem a noção de utilidade cardinal, esses autores não viam sentido na ideia de comparabilidade entre as utilidades, pois o que fundamenta a utilidade individual, reside na subjetividade que é particular a cada indivíduo no processo de valorização dos bens ou atos.

Por sua vez, os autores da segunda geração justificavam o uso da noção de comparabilidade entre distintos estados do mundo e entre as pessoas no processo de tomada

de decisão. Assim, [Marshall \(1890\)](#) e [Edgeworth \(1881\)](#) desenvolveram argumentos demonstrando a centralidade da ideia da utilidade cardinal e o retorno à comparabilidade das utilidades na análise de bem-estar social.

Esta perspectiva (utilidade cardinal e comparabilidade entre as utilidades) sofreu críticas por não ser devidamente científica, pois as bases da análise eram absolutamente subjetiva-psicológicas, de complicada tratabilidade na construção de uma medida objetiva. [Pareto \(1896\)](#), adepto do positivismo científico, rejeitava todas as perspectivas metafísicas e buscava legitimar, cientificamente, as ciências sociais. Desenvolve, assim, a ideia de *indices of ophelimity*, que busca afastar-se da noção de utilidade cardinal e analisa a ideia de preferências e escolhas dos agentes. Com isso, surge a noção de *utilidade ordinal* e não mais *cardinal*: a centralidade da análise não é mais a *mensuração da utilidade*, mas sim o *ordenamento* que os agentes fazem na tomada de decisão. Logo, pouco importa se, no processo de escolha entre dois bens distintos, (x, y) , onde $x = 10$ e $y = 9$ ou $x = 10000$ e $y = 0.1$, os valores correspondentes aos bens sejam diferentes: *importa o ordenamento e não a intensividade da utilidade*. Assim, em ambos os casos, x é preferível à y . Segundo [Pareto \(1896\)](#):

The ophelimity, or its index, for one individual, and the ophelimity, or its index, for another individual, are heterogeneous quantities. We can neither add them together nor compare them. No bridge, as the English say. A sum of ophelimity enjoyed by different individuals does not exist; it is an expression which has no meaning ([PARETO, 1896](#), p.1906).

A crítica à perspectiva do uso da utilidade cardinal e comparabilidade entre as pessoas terá em [Robbins \(1938\)](#) um divisor de águas. Para ele, não há espaço na ciência para conceitos sem sentidos e julgamentos de valores. Assim, se a economia quiser ser, de fato, uma ciência, deve-se afastar dos conceitos imprecisos. Para ele:

I still cannot believe that it is helpful to speak as if interpersonal comparisons of utility rest upon scientific foundations that is, upon observation and introspection. ([ROBBINS, 1938](#), p.640).

Evidente que essa posição de [Robbins \(1938\)](#) insere-se numa perspectiva mais ampla sobre o positivismo lógico. Por exemplo, para [Ayer \(1936\)](#):

We can now see why it is impossible to find a criterion for determining the validity of ethical judgements. It is not because they have an ‘absolute’ validity which is

mysteriously independent of ordinary sense-experience, but because they have no objective validity whatsoever. If a sentence makes no statement at all, there is obviously no sense in asking whether what it says is true or false. And we have seen that sentences which simply express moral judgements do not say anything. They are pure expressions of feeling and as such do not come under the category of truth and falsehood. They are unverifiable for the same reason as a cry of pain or a word of command is unverifiable - because they do not express genuine propositions (AYER, 1936, p.108).

O impacto na economia do bem-estar foi imediato: se não se pode ter conceitos imprecisos, como medir a utilidade cardinal? Ora, se não se tem utilidade cardinal, perde-se a possibilidade de se comparar as utilidades entre as pessoas. Dessa forma, a passagem para o conceito de utilidade ordinal, que começou com Pareto (1896), será consolidada na obra *Value and Capital* de Hicks (1939a).

Neste mesmo contexto, num celebrado artigo, Samuelson (1938) demonstrou que não há necessidade de usar o conceito de utilidade para desenvolver o comportamento dos agentes econômicos, pois o que fundamenta o processo racional de escolha dos agentes são suas preferências. Assim, basta observar as preferências que são *reveladas* nos processos de escolha para derivar o comportamento dos agentes. Logo, se existem duas opções de escolhas (x, y) e escolhe-se x , isso significa que houve uma preferência que foi revelada no processo de escolha: x , segundo algum critério, foi escolhido em detrimento de y . Dessa forma, representa-se as preferências por uma função utilidade. Assim, a utilidade de x será maior que a utilidade de y se, e somente se, x for preferível à y . Formalmente:¹ $u(x) \geq u(y)$, se, e somente se, $x \succsim y$

A partir desse desenvolvimento, abriu-se espaço para discussão sobre bem-estar derivada do processo de escolha das pessoas. Dessa forma, a busca do ótimo social não necessita da comparação entre as utilidades e satisfações das distintas pessoas. Emergem, assim, discussões sobre medidas de bem-estar e critérios normativos que uma dada ação deveria respeitar. Em especial, a busca pelo *ótimo de Pareto* no processo de escolhas sociais.

2.1.3 Bem-Estar Econômico e Princípio de Pareto

Entre o final do século XIX e começo do século XX aumentou o interesse na discussão sobre bem-estar, tanto do ponto de vista empírico quanto teórico. Este interesse fez surgir um campo de pesquisa autônoma dentro da teoria econômica: *economia do*

¹ Observe que há uma diferença entre os símbolos \geq e \succsim . O primeiro é o símbolo tradicional de maior que enquanto o segundo é o símbolo de preferível à.

bem-estar. É reconhecido que a solidez desse novo campo teve em A. C. Pigou, com duas obras, o autor mais importante: *Wealth and Welfare* (PIGOU, 1912) e *The Economics of Welfare* (PIGOU, 1920). Para Pigou, a aplicação utilitarista à análise de bem-estar necessitava da noção de comparabilidade entre as pessoas:

Nevertheless it is evident that any transference of income from a relatively rich man to a relatively poor man of similar temperament, since it enables more intense wants to be satisfied at the expense of less intense wants, must increase the aggregate sum of satisfaction ((PIGOU, 1920) apud (LITTLE, 2002, p.12))

A crítica de Robbins (1938) foi fundamental aqui também, pois o que surgiu daí quis se afastar do que existia. Dessa forma, o desenvolvimento na linha de Marshall (1890) e Pigou (1920) corresponderia ao *old welfare economics* e o que emergiu, *new welfare economics*. Com isso, dá-se o surgimento de dois grupos distintos. De um lado, autores britânicos, como Kaldor (1939), Hicks (1939b), de Scitovszky (1941), que desenvolvem os conceitos de *eficiência de Pareto* e *Princípios de compensação* para avaliação de bem-estar, argumentando em torno da necessidade de consensos sociais (unanimidade). De outro lado, autores dos EUA como Bergson (1938), Lange (1942), Samuelson (1947), que consideram os julgamentos normativos numa escala mais ampla, sendo o critério de Pareto um, entre outros importantes critérios. Dessa forma, busca-se desenvolver uma função ordinal de bem-estar social (BAUJARD, 2015).

Assim, fica clara a importância do critério de eficiência de Pareto para análise da *new welfare economics*. Tecnicamente, o *critério de Pareto* pode ser assim descrito. Imagine que existam duas alternativas, x e y , e um conjunto de pessoas, indexadas por i , que pertencem a uma população N . Se para algum indivíduo i , tivermos $x \succsim_i y$, significa que a escolha x é pelo menos tão boa quanto a opção y ; se tivermos $x \succ_i y$, significa que x é estritamente melhor que y ; se $x \sim_i y$, significa indiferença entre as opções x e y . Afirma-se que a opção x será *Pareto superior* se, e somente se, todos os indivíduos $i \in N$ decidirem que $x \succsim y$ e para pelo menos uma pessoa $x \succ y$. Observe que caso isso ocorra, tem-se uma situação de plena concordância entre as pessoas, ou seja, tem-se uma unanimidade.

O *critério de Pareto* auxilia na tomada de decisão sobre qual ação deve ser moralmente realizada. Por exemplo, se uma tomada de decisão implicar na melhora de uma pessoa i e, ao mesmo tempo, todos os outros (diferente de i) não se sentirem afetados por essa ação, porque não aceitar essa ação como moralmente superior ao estado atual? Essa nova situação, então, seria *Pareto superior* à anterior e teríamos uma *melhora de Pareto*.

Considere o seguinte exemplo. Suponha que temos 3 pessoas realizando uma tarefa

qualquer. Denomine essa tarefa de X . Cada pessoa recebe uma remuneração: $(10, 10, 7)$, respectivamente. Suponha que exista uma outra tarefa Y que remunera, $(12, 12, 7)$, respectivamente. Diante disso, afirma-se que a tarefa X não é *Pareto superior* porque existe uma outra alternativa Y , que pode dar maiores retornos para duas pessoas e não prejudica a terceira².

Em suma, o critério de Pareto é um princípio normativo importante para avaliar situações alternativas de bem-estar. A derivação de funções de bem-estar social, uma medida agregada que parte das preferências individuais, é o resultado mais importante da área de economia de bem-estar. É justamente neste contexto que se deve compreender o desenvolvimento teórico do livro *Social Choice and Individual Values* de Arrow (1951): como um desenvolvimento (crítico) à noção de função de bem-estar, tanto na linha de Kaldor-Hicks quanto Bergson-Samuelson. Para Arrow (1951):

If we exclude the possibility of interpersonal comparisons of utility, then the only methods of passing from individual tastes to social preferences which will be satisfactory and which will be defined for a wide range of sets of individual orderings are either imposed or dictatorial (ARROW, 1951, p.59).

Mas, como representar a linha divisória entre economia do bem-estar e a teoria da escolha social? Dois teoremas fundamentais da economia de bem-estar conectam competição com otimalidade, mas não respondem como escolher entre opções que são ótimos de Pareto. Como afirmar que uma situação A é melhor para a sociedade do que a situação B ? A teoria da escolha social tenta, justamente, fazer essa ligação entre escolhas baseadas em preferências individuais e ótimo social.

Assim, será que é possível derivar uma função de escolha social a partir das escolhas individuais? Se fizer sentido dizer que existe uma preferência social, então é possível avaliar as alternativas e definir qual a melhor ação? Esta é a razão de ser da teoria da escolha social. A definição da escolha social pode resultar de um processo interativo via mecanismo de mercado, mas essa não é a única forma de definir a escolha social. Os processos políticos e os mecanismos de votos também revelam, em algum sentido, as preferências sociais.

² Cabe fazer menção a possibilidade de se discutir alocações de recursos que possam ser Pareto-eficiente mas que não sejam *envy-free*. Neste exemplo, a alocação $(12, 12, 7)$ é Pareto-superior à alocação $(10, 10, 7)$, mas pode sacontecer da pessoa 3, que recebe os mesmos 7 nas duas alocações, sintase prejudicada (ou com inveja). Não faz parte desse trabalho avançar nessa questão. (ver Foley (1967), Varian (1976)).

2.2 Procedimentos de Votação e Escolhas Sociais

Até aqui, as discussões sobre as raízes históricas da teoria da escolha social teve como referência o surgimento do utilitarismo e da análise de bem-estar entre os séculos XVIII e XX. Entretanto, do ponto de vista histórico, a análise sobre como determinar uma dada decisão coletiva (preferência social) é muito anterior à análise utilitarista e se deu via discussões procedimentais sobre regras de votações.

A historicidade sobre essas questões das escolhas sociais não se deu de forma linear ao longo do tempo. Sabe-se que, enquanto campo do conhecimento acadêmico, se consolidou com as obras de [Arrow \(1951\)](#) e [Black \(1958\)](#) e ao longo da segunda metade do século XX. Entretanto, as raízes de tais discussões podem ser mais profundas. Na Idade Média, Ramon Llull (1235-1315) propôs um método de votação por maioria com comparação aos pares, enquanto Nicolas Cusanus (1401-1464) propôs uma variante do método de Borda ([MCLEAN, 1990](#)). Em 1672, um alemão, Samuel von Pufendorf (1632-1694), comparou os métodos de votação por maioria simples, maioria qualificada e unanimidade e ofereceu uma estrutura de preferência que pode ser vista como precursora da ideia de preferência de pico único (*single-peakedness*). No século XIX, o matemático britânico Charles Dodgson (1832-1898), melhor conhecido como Lewis Carroll, independentemente, redescobriu os *insights* de Condorcet e Borda e desenvolveu uma teoria da representação proporcional. Essas descobertas foram recuperadas pelo trabalho de [Black \(1958\)](#), que recolocou a discussão para a comunidade moderna que pesquisa nessa área ([MCLEAN et al., 1995](#)).

Esta seção tem como objetivo discutir e apresentar a historicidade das escolhas sociais através de processos eleitorais. Abordam-se, escolhas por sorteios, das regras consensuais mais rígidas (unanimidade) às menos restritivas (maioria simples, qualificada etc) e sua aplicação ao longo da história, dando ênfase aos personagens mais importantes no desenvolvimento da teoria da escolha social.

2.2.1 Regras Eleitorais e Procedimentos de Votação em Perspectiva Histórica

A história humana está repleta de contínuo processo de invenções e redescobertas de fórmulas eleitorais e de definições procedimentais sobre regras de votação. Seguindo [Colomer \(2004\)](#), uma forma de organizar o pensamento sobre essas invenções é classificá-las em: unanimidade, sorteio, maioria e proporcionalidade. Entretanto, apesar de ser útil como forma de organizar o pensamento, esta repartição não deve implicar em regras estanques, sem possibilidades de regras intermediárias ou, mais importante, da adoção de regras distintas simultaneamente. O objetivo aqui será revisar, brevemente, cada abordagem.

Unanimidade

A regra de eleição por unanimidade é a forma mais intuitiva de solução dos problemas de escolhas coletivas desde o surgimento dos primeiros agrupamentos humanos. Mesmo não havendo um procedimento formal de votação, o mero acordo coletivo por consenso representaria a forma arcaica da unanimidade. É verdade que um acordo coletivo consensual não necessariamente implicava escolhas democráticas e/ou justas, pois a existência de líderes (políticos, religiosos etc.) poderiam conduzir a coletividade à sua escolha particular. Segundo Colomer (2004):

Approval of proposals and election of delegates by unanimity are almost instinctive procedures in relatively simple, rather homogeneous and not highly populated gatherings and assemblies. Families, groups of friends, urban gangs, neighbourhood meetings, corporation partners and club members tend to make collective decisions under conditions of general agreement. A variety of historical evidence also suggests that at a more general level Ancient Mesopotamian, Assyrian and Sumerian assemblies, Athenian and Spartan agoras, early Christian communities, Germanic tribes and communes, pre-Columbus Amerindian peoples, English and American small town-hall assemblies and other comparable units usually made collective enforceable decisions and reached agreements by virtual unanimity. Also, consuls were elected by traders, bishops by priests and believers, magistrates by citizens, etc., on the basis of large consensus. Decision procedures in these disparate communities included silent acquiescence, clashing spears against shields, shouts of commendation or acclamation, murmurs in favour or cries against the proposer, rising to one's feet and other 'viva voce' expressions rather than formal voting sessions (COLOMER, 2004, p.14).

Do ponto de vista histórico, a Igreja Católica foi uma importante instituição no processo de estabelecimento da regra consensual da unanimidade e de discussões sobre seu significado. Para a Igreja, as escolhas dos seus representantes hierárquicos deveriam ser feitas por unanimidade, pois revela-se, de fato, a vontade de Deus. Logo, tem-se a máxima: *vox populi, vox Dei*.

Ainda segundo Colomer (2004), a Igreja reestabeleceu o retorno ao princípio do código Justiniano que afirmava que "*what concerns similarly all ought to be approved by all*" e que "*he who governs all should be elected by all*". Entretanto, chegar a um consenso pode implicar dificuldades e lentidões nas tomadas de decisões sobre a organização da estrutura hierárquica. Assim, ao longo do tempo, conflitos e a emergência de facções internas fizeram com que se flexibilizasse a necessidade do resultado consensual através da utilização de votação ponderada, dando pesos distintos de acordo com a posição

hierárquica na estrutura interna. O problema com essa solução é que, ao invés de se ter mais estabilidade nos processos decisórios, pode ocorrer mais fragmentação, pois a escolha do "alto clero" pode ser completamente diferente da escolha do "baixo clero". Assim, para amenizar os conflitos internos, o Papa Alexandre III adotou, em 1179, a regra de votação por maioria qualificada de 2/3.

Esta forma de se buscar solução, primeiro via consenso e depois via maioria qualificada, foi adotada em muitas partes da Europa Medieval e prosseguiu até os dias modernos como uma regra de votação que flexibiliza o rigor da escolha. Entretanto, foi justamente essa flexibilização que fez surgir, nos distintos lugares, coalizões bem consolidadas e disputas políticas polarizadas em torno de grupos (facções) que dão origem aos partidos políticos modernos. Apesar disso, este procedimento possibilita um resultado mais estável, já que a coalizão perdedora precisará convencer, no mínimo, a maioria dos eleitores da coalizão vencedora a mudar de opinião, dificultando o processo de mudança e garantindo estabilidade. Sobre isso, o Papa Pio II afirmará sobre sua eleição: "*what is done by two thirds of the sacred college [of cardinals], that is surely of the Holy Ghost, which may not be resisted*" (COLOMER, 2004, p.17).

Sorteio

A escolha dos ocupantes aos cargos públicos através de sorteios é uma antiga tradição que remonta à democracia desenvolvida em Atenas e nas cidades-Estados republicanas do período Renascentista. A escolha por sorteio tras consigo, pelo menos, duas vantagens: primeiro, possibilita a rotação entre os membros ocupantes dos cargos públicos, prevenindo a formação de uma elite fechada e permanente; segundo, amplia-se o sentido de participação e interesse republicano pela coisa pública, pois a experiência e o aprendizado sobre os problemas coletivos seriam compartilhados por todos.

Com base nessa experiência, o filósofo Aristóteles construiu sua concepção de democracia que consistia na possibilidade dos cidadãos governarem e serem governados. Assim, democracia se associa às escolhas por sorteios; enquanto escolhas por eleição seriam oligárquicas. Por sua vez, os filósofos do século XVIII também compartilhavam dessa narrativa: para Montesquieu, por exemplo, "*o sufrágio pelo sorteio faz parte da natureza da democracia; o sufrágio pela escolha, da natureza da aristocracia*".

Maioria

A votação por maioria deve ser analisada dentro do contexto do Império Romano e a própria história dos procedimentos de votação adotadas pela Igreja Católica está intimamente vinculada a esse contexto. Votação por maioria era prática rotineira no processo de tomada de decisão dentro do Império. O debate se dava em torno de qual

regra seguir: maioria simples ou qualificada; se qualificada, qual a *quota* limite, (2/3) ou (3/4)?

Da mesma forma como se justificou a escolha unânime como a escolha certa por ser a escolha divina, ao longo da história foram criadas outras justificações da legitimidade da decisão advinda da maioria e não da unanimidade. Assim, por exemplo, Hugo Grotius vai afirmar que: "*the majority would naturally have the right and authority of the whole*" (Grotius, 1624: book 2, ch. 5, 17 apud Colomer (2004, p.27)) e John Locke "*the act of the majority passes for the act of the whole and determines, as having by the Law of Nature and Reason, the power of the whole*" (LOCKE, 1689: II, 96 apud Colomer (2004, p.27)). Da mesma forma, para Rousseau a "vontade geral" será alcançada pela maioria, "*the vote of the majority always binds the rest*" ROUSSEAU, 1762: book 4, ch. 2 apud Colomer (2004, p.27)).

De forma mais enfática, para Hobbes:

If the representative consists of many men, the voice of the greater number must be considered as the voice of them all. For if the lesser number pronounce, for example, in the affirmative, and the greater in the negative, there will be negatives more than enough to destroy the affirmatives, and thereby the excess of negatives, standing un-contradicted, are the only voice the representative has' (HOBBS, 1651: ch. 16 apud Colomer (2004, p.28)).

Proporcionalidade

A crítica à ideia de democracia via sorteio e de rotação entre os eleitos teve em Platão um importante ponto de vista. Para ele, existiriam distintas competências inerentes aos indivíduos e, em função disso, a administração pública e republicana requereria que fossem destinados aos melhores e mais capazes de desenvolver uma gestão pública eficiente. Dessa forma, a adoção moderna de eleição por representação, em alguma medida, levou em consideração essas críticas ao sorteio como forma mais democrática de representação popular, pois a democracia representativa impõe a existência de uma aristocracia política que representará todos os cidadãos.

Quem melhor argumentou em prol da representatividade foi o filósofo inglês John Stuart Mill. Segundo Miguel (2000),

[...] são perceptíveis as tensões entre os aspectos democráticos e aristocráticos da combinação. Fiel à máxima utilitarista de que cada um é o melhor juiz dos próprios interesses, ele precisa dar espaço à participação política de todos. Por outro

lado, há o medo da "tirania da maioria", que se traduz concretamente no "duplo perigo" causado pela predominância de trabalhadores manuais no eleitorado — perigo do "padrão demasiadamente baixo da inteligência política" e da "legislação de classe". Assim, a representação deveria favorecer as minorias e, em especial, uma minoria específica: as classes proprietárias (e cultas). Afastado o risco próprio à democracia, o sistema representativo poderia revelar todos os seus méritos, o mais importante dos quais seria o amplo desenvolvimento dos talentos individuais, proporcionado pela participação política (eleitoral). Ao se envolver nos debates públicos, para escolher seu representante, o cidadão comum sairia do casulo de seus negócios privados, ampliaria seus horizontes, ganharia um conhecimento maior da sociedade. Tudo isto repercutiria de maneira positiva na vida cotidiana. Os indivíduos se tornariam mais ativos e mais capazes. Por isso, a democracia representativa é, para Stuart Mill, a melhor forma de governo, mesmo que por vezes chegue a decisões errôneas e possa mostrar déficits de competência. Um despotismo esclarecido e bem-intencionado, mesmo que fosse possível garantir tais atributos, geraria apatia e passividade na população, já que todas as decisões viriam prontas de cima. Por outro lado, uma democracia direta, caso se pudessem superar os obstáculos físicos à sua consecução, tomaria demasiado tempo e energia dos cidadãos, impedindo que se dedicassem às atividades produtivas (MIGUEL, 2000, p.74).

Apesar de ter representatividade de todos os níveis sociais, a ideia de proporcionalidade não significava dar mesmo peso a todos. A ideia de se ter representação proporcional só surgirá no século XVIII na França e nos EUA com a discussão formal sobre como alocar as cadeiras parlamentares de tal forma a garantir a melhor proporcionalidade entre o número de votos e o número de cadeiras correspondente. É justamente aqui que reside um importante capítulo em torno da teoria da escolha social.

2.2.2 História da Teoria da Escolha Social por seus Autores

Contar a história da teoria da escolha social através dos autores não é uma tarefa fácil. Primeiro, não existe uma continuidade histórica, linear, entre os autores ao longo do tempo. Por exemplo, sabe-se que muitos estudos foram feitos de forma autônoma, sem se basear nas obras anteriores, o que implica em desenvolvimento teórico de descoberta simultânea. Entretanto, apesar de serem desenvolvimentos simultâneos, isso não implica dizer que eram autores contemporâneos, fazendo com que, em alguns casos, a redescoberta possa ter sido feita, originalmente, séculos antes!

Para McLean et al. (1995) existiram, pelo menos, três redescobertas sobre a teoria da escolha social. Em segundo lugar, apesar da discussão sobre escolha social estar vinculada à noção de democracia, não existiu uma afinidade teórica que unificasse a discussão.

Assim, autores importantes sobre regras e procedimentos democráticos, como os Gregos e Romanos, não desenvolveram análises sobre procedimentos e suas consequências lógicas. O que explica tamanha discrepância temporal entre as redescobertas? O que explica esse lapso?

A resposta para a primeira questão está relacionada ao fato de que os autores mais importantes sobre as consequências lógicas da teoria da escolha social estavam tentando resolver problemas práticos e, pela complexidade da discussão, não tiveram capacidade de verem suas ideias sendo expostas e debatidas publicamente. Dessa forma, existia um problema de linguagem que precisava ser uniformizada. Aqui, linguagem não se refere meramente ao idioma utilizado por cada autor, mas sim a linguagem técnica dos modelos desenvolvidos (uso da matemática - lógica simbólica, análise combinatória e permutação, etc).

A segunda questão tem apelo histórico. Apesar de processos de votação se confundirem com aspectos democráticos, essa relação não se deu de forma direta. É sabido que as ideias modernas de democracia vieram da Grécia Antiga, mas poucos textos desse período trata, efetivamente, sobre procedimentos de votação. A razão para isso é simples: primeiro, o processo de ocupação dos cargos públicos eram feitos através de sorteios e não de votação; segundo, quando existiam votações, sempre eram binárias, uma proposição contra outra do tipo: *sim ou não*; *contra ou a favor*. Nesta perspectiva, não se tem a necessidade de se aprofundar nos estudos e implicações sobre regras de votação e suas consequências lógicas porque a intuição de uma votação binária não deixa dúvidas sobre a robustez do procedimento: *ganha quem tiver mais da metade*.

O problema da teoria da escolha social, em geral, e dos procedimentos de votação, em particular, surgem quando se tem uma disputa entre multicandidatos e não uma disputa binária. Não é sem razão que o primeiro texto conhecido sobre aspectos da teoria da escolha social seja, justamente, um que trata desse tipo de escolha: Plínio, o Jovem.

Plínio, o jovem (62-113)

Em carta a Titius Aristo, um renomado jurista, Plínio relata uma votação que ocorreu no Senado Romano sobre a investigação da morte do Senador Afranius Dexter. Não se sabia se o Senador tinha cometido suicídio ou se tinha sido assassinado. Como foi encontrado morto na sua residência, especulou-se que quem poderia ter cometido esse crime teria sido um dos seus escravos. Assim, o Senado tinha que decidir sobre o julgamento do escravo e as penas seriam: morte, banimento ou absorção.

Plínio defendia que não existiam provas concretas contra o escravo e deveriam escolher a absorção. Entretanto, tal posição não era consensual. Plínio sabia que sua posição

era majoritária, mas não absoluta (tinha cerca de 40% dos votos contra 30% de cada uma das outras opções). Ora, diante disso, como deveria ser realizada a votação? Para Plínio, a votação deveria ser realizada em um único turno com cada grupo de senadores indo para um lado do Senado. Logo, na expectativa de Plínio, deveriam se formar três grupos bem distintos e, dessa forma, venceria a alternativa de tornar o escravo livre. Entretanto, o que Plínio não esperava era um comportamento estratégico: quem era favorável à pena de morte, tinha como segunda opção na sua escala de preferência, o banimento; por sua vez, quem era favorável ao banimento, não queria a pena de morte tão pouco a absorção. Com isso, houve uma coalizão entre os partidários do banimento e da pena de morte, transformando-se, o banimento, numa coalizão vencedora.

Apesar dessa carta de Plínio não desenvolver nenhum procedimento formal sobre regras e/ou procedimentos de votação, é considerado o primeiro relato de uma situação típica de processos de escolhas sociais não-binárias: o comportamento estratégico. Quem primeiro observou esta carta do ponto de vista da escolha social foi Farquharson (1969) no livro *Theory of Voting*. A busca por procedimentos eleitorais que sejam imunes ao comportamento estratégico será analisado no capítulo 4 através do *teorema de Gibbard-Satterthwaite*.

Ramon Lull (1233-1316)

Após a carta de Plínio, não se tem nenhuma informação sobre outros textos que tratem de temas ligados à escolha social até os trabalhos do catalão Ramon Lull. Lull deixou mais de 290 livros versando sobre religião, lógica, astronomia, alquimia etc. McLean et al. (1995) descrevem, pelo menos, três obras fundamentais para a história da escolha social: *Artifitium Electionis Personarum* (1274), *Blanquerna* (1283) e *De Arte Eleccionis* (1299).

A obra *Blanquerna* é considerado o primeiro romance escrito na Europa e conta a história do jovem que dá nome ao livro e que, contra a vontade de sua mãe, resolve se tornar um eremita. Sua mãe queria que ele se casasse com Natana. Entretanto, após um breve romance, Blanquerna convence Natana a se tornar monja. Blanquerna se torna bispo e arcebispo. Pouco tempo depois, papa. Após longo período, Natana resolve se tornar abadessa e, para tanto, necessitava ser eleita entre os pares. A morte da madre-superior possibilitou discussões sobre os procedimentos a serem adotado. Neste momento, Natana informa que soube de uma nova forma de se realizar eleição e que tal forma seria apropriada.

É justamente nesse processo que Lull apresenta sua discussão sobre votação. No capítulo 24 da obra *Blanquerna*, chamado *How Natana was elected abbess*, Lull escreve:

Natana and all the sisters who had a vote in the election gathered in a chapter to elect the abbess. Natana said to all the sisters that there was a very great necessity to have a good superior, for through the goodness of the superior God gives virtue to the subordinate. «Now, since our superior has passed from this life to the other as is required by nature and reason, it is needful for us all that we seek from among ourselves the one who is greatest in holiness of life and the love of God; for she is worthy to be our pastor according to the ordinance and the will of God. All the sisters wanted to elect the abbess according to the method to which they had been accustomed to elect. But Natana said that she had heard of a novel electoral method based on a system and figures; this system follows the conditions of The Book of the Gentile and the Three Wise Men, which follows The Art of Finding the Truth. «By this method,» said Natana, «is found the truth; by this truth we will be able to find the sister who is most suitable and best to be our abbess. Natana said: «In this chapter we are 20 sisters who have a vote in electing our pastor. According to the system we must elect from these 20 sisters an odd number, say 5 or 7; for such a [odd] number is more convenient for the election than another [even number], and the number 7 is more convenient than 5. First let an oath be taken by all the sisters to tell the truth. Then let the first sister be asked in secrecy which of the other 19 sisters are most suitable to be among the 7 who elect the superior. Afterwards, let the second be asked, and then the third, and so on, in order, until the last. And on each occasion, let it be written down what each sister says. In the end, let it be seen who are the sisters who have received the most votes. And those who have the most votes shall be the 7 sisters to elect the abbess.» (LULL, 1283 apud (MCLEAN et al., 1995))

As obras de Lull envolvem um complexo esquema de permutação e análise combinatória, com processo de votação via comparação binária entre os candidatos (método de votação aos pares), tendo regra majoritária em cada etapa. Uma votação com n candidatos apresenta $n(n - 1)/2$ comparações. Vence quem apresentar mais vitórias na comparação aos pares. Modernamente, este resultado se assemelha com o método de Condorcet (1789) e Copeland (1951). Na figura 1 a seguir, tem-se um exemplo da obra de Lull. A apresentação se dá através de um quadro com letras demonstrando o percurso do eleito.

b	c	d	e	f	g	h	i
b	c	d	e	f	g	h	i
b	c	d	e	f	g	h	i
b	c	d	e	f	g	h	i
b	c	d	e	f	g	h	i
b	c	d	e	f	g	h	i
b	c	d	e	f	g	h	i

Figura 1 – Esquema de Votação - Blanquerna (1283)

Segundo [McLean et al. \(1995\)](#), como Lull estava escrevendo na fronteira entre o Cristianismo e o Islamismo, este desenvolvimento utilizando conhecimentos de matemáticos poderia ser fruto da *Era de Ouro* do conhecimento do mundo Árabe e seus notáveis avanços na matemática, medicina, astronomia, etc. Neste sentido, talvez, segundo eles, deveríamos buscar as origens da escolha social em textos árabes. Entretanto, tal esforço ainda não foi realizado.

Nicholas Cusanus (1401-1464)

O desenvolvimento da obra de Lull só iria ocorrer muito tempo depois com Nicholas Cusanus. Sabe-se que Cusanus teve contato com a obra de Lull em 1428 em Paris e que teve uma carreira eclesiástica de sucesso, além de ser considerado um dos grandes polímatas do século XV. Em função disso, sua obra mais importante *The Catholic Concordance* retrata os bastidores do Concílio de Basileia de 1431. Sua obra busca, justamente, desenvolver um sistema de votação para escolha de Imperadores, Papas, etc. Entretanto, diferente de Lull, Cusanus desenvolve um método diferente de comparação aos pares. Seu método aloca pontos aos candidatos seguindo estritamente a ordem de cada eleitor. Assim, ao final do processo, quem tivesse mais pontos seria declarado vencedor. Para ele, "*teller must add up the numbers by each name, and the candidate who has collected the highest total will be emperor*" ([MCLEAN et al., 1995](#), p.78). E acrescenta:

By this method innumerable malpractices can be avoided, and indeed no malpractice is possible. In fact, no method of election can be conceived which is more holy, just, honest, or free. For by this procedure, no other outcome is possible, if the electors act according to conscience, than the choice of that candidate adjudged best by the collective judgment of all present. ([MCLEAN et al., 1995](#), p.78).

Claramente tem-se a antecipação do que viria a ser conhecido como método de Borda.

Samuel von Pufendorf (1632-1694)

Após os trabalhos de Lull e Cusanus, apenas no século XVII tem-se algo sobre escolha social. Samuel von Pufendorf publica *De Jure Naturae and Gentium* (1672) que, segundo Gaertner (2005), apresenta o esboço sobre o que seria mais tarde o conceito de preferências de pico-único (*single-peake*). No Livro VII, capítulo II, seção 18, tem:

Thus those who fix a fine upon a man, at twenty units of value, may be united with those who fix it at ten units, against such as would acquit him altogether, and the defendant will be fined ten units, because this is agreeable to the majority of judges, in view of the fact that those in favour of the twenty, are included with those in favour of the ten (GAERTNER, 2005, p.237).

Mesmo Lull e Cusanus, em certo sentido, antecipando Condorcet e Borda, respectivamente, seus trabalhos não são compatíveis com a qualidade técnica dos trabalhos originais desses autores.

Jean Antoine-Nicolas de Caritat, Marquês de Condorcet (1743-1794)

Condorcet era um pensador liberal na era da Revolução Francesa que foi perseguido pelas autoridades revolucionaras por críticas dirigidas a eles. Na sua obra *Essay on the Applications of Analysis to the Probability of Majority Decision* Condorcet (1785), advogou um sistema de votação particular, votação por comparação aos pares, e apresentou seus dois resultados mais proeminentes.

O primeiro, conhecido como *Condorcet' Jury Theorem*, diz que se cada membro de um júri tiver uma distribuição independente e igual, melhor que a aleatória mas pior que a perfeita, de fazer o correto julgamento, a maioria dos jurados tem uma probabilidade maior de estar correto do que cada julgador individual, e a probabilidade do julgamento como um todo ser correto aproxima-se de 1 a medida que o número de juízes aumenta. Dessa forma, sob certas condições, a regra da maioria é uma boa técnica para se checar a verdade. Esta ideia está caracterizada como sendo a formalização da ideia de "*racionalidade das multidões*" e a "*vontade geral*" de Rousseau.

O segundo grande *insight* de Condorcet é o processo de escolha de comparação aos pares (dois em dois). Neste processo de votação, a alternativa que vencer todas as outras

no processo de comparação, será considerado vencedor. Considere o seguinte exemplo (tabela 5):

	Alan	Bruna	Carol
1ª opção	y	x	x
2ª opção	x	y	z
3ª opção	z	z	y

Tabela 5 – Sistema de Condorcet - Exemplo

Observe que, de acordo com as preferências das três pessoas pode-se realizar uma votação para escolher qual será a alternativa vencedora. Pelo método de Condorcet, tem-se que comparar cada alternativa com outra, para todas as alternativas. Assim:

	Alan	Bruna	Carol	Resultado
x contra y	y	x	x	x
x contra z	x	x	x	x
y contra x	y	x	x	x
y contra z	y	y	z	y
z contra x	x	x	x	x
z contra y	y	y	z	y

Tabela 6 – Sistema de Condorcet - Resultado

Dessa forma, a única alternativa que venceu as outras duas foi a alternativa x . Logo, esta alternativa é a *vencedora de Condorcet*. O problema com esse tipo de abordagem é que, nem sempre, tem-se um vencedor através desse método, conduzindo a uma impossibilidade decisória. Considere o seguinte exemplo (tabela 7):

	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba	Fabio	Graça	Helder
1ª opção	x	x	x	y	y	y	z	z
2ª opção	y	y	y	x	x	x	x	y
3ª opção	z	z	z	z	z	z	y	x

Tabela 7 – Sistema de Condorcet - Exemplo II

Comparando aos pares (tabela 8):

	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba	Fabio	Graça	Helder	Resultado
x contra y	x	x	x	y	y	y	x	y	x=y
x contra z	x	x	x	x	x	x	z	z	x
y contra x	x	x	x	y	y	y	x	y	x=y
y contra z	y	y	y	y	y	y	z	z	y
z contra x	x	x	x	x	x	x	z	z	x
z contra y	y	y	y	y	y	y	z	z	y

Tabela 8 – Sistema de Condorcet - Resultado II

Temos que as alternativas x e y ambas vencem a alternativa z , mas não é possível dizer qual das duas será a vencedora de Condorcet. Além dessa dificuldade em se ter um vencedor, pode-se ter problemas de inconsistências. Este resultado (ou a falta dele) é conhecido na literatura como *Paradoxo de Condorcet*. Considere o primeiro exemplo, levemente modificado (tabela 9):

	Alan	Bruna	Carol
1ª opção	y	x	z
2ª opção	x	z	y
3ª opção	z	y	x

Tabela 9 – Sistema de Condorcet - Exemplo III

Comparando aos pares:

	Alan	Bruna	Carol	Resultado
x contra y	y	x	y	y
x contra z	x	x	z	x
y contra x	y	x	y	y
y contra z	y	z	z	z
z contra x	x	x	z	x
z contra y	y	z	z	z

Tabela 10 – Sistema de Condorcet - Resultado III

Observe que nenhuma alternativa conseguiu vencer as duas outras alternativas, pois cada uma venceu uma e perdeu outra. Logo, não há vencedor de Condorcet. Assim, temos um ciclo que viola a transitividade e não tem-se, claramente, uma alternativa vencedora. Com isso, Condorcet antecipou um dos temas mais importantes na teoria moderna da escolha social: a regra da maioria, forma mais plausível de se escolher numa decisão coletiva, trás consigo problemas que precisam ser esclarecidos para não se ter inconsistências na decisão.

Jean-Charles Borda (1733-1799)

Um contemporâneo de Condorcet, o francês Jean-Charles Borda defendeu um sistema de votação alternativo ao métodos da votação por maioria. O método de contagem de Borda (1784) (*Borda count*) evita o *paradoxo de Condorcet*, pois leva em consideração não apenas as primeiras escolhas de cada eleitor. Seu método possibilita considerar toda a escala de preferência, dando pontos de acordo com o *ranking* que cada pessoa apresenta. Assim, a pior opção recebe 1, a segunda pior 2, e assim, sucessivamente. Dessa forma, capta a intensidade dos ordenamentos das escolhas.

Considere o primeiro exemplo, mais uma vez, só que analisando pelo método de Borda (tabela 11):

	Alan	Bruna	Carol
1ª opção	y	x	x
2ª opção	x	y	z
3ª opção	z	z	y

Tabela 11 – Sistema de Borda - Exemplo

Assim, tem-se que dar pontos às alternativas seguindo a ordem das preferências e, no final, quem tiver mais pontos, será o vencedor de Borda. Logo:

	Alan	Bruna	Carol
1ª opção	y = 3	x = 3	x = 3
2ª opção	x = 2	y = 2	z = 2
3ª opção	z = 1	z = 1	y = 1

Tabela 12 – Sistema de Borda - Resultado

Logo,

$$x = 3 + 3 + 2 = 8$$

$$y = 3 + 2 + 1 = 6$$

$$z = 1 + 1 + 2 = 4$$

Dessa forma, a alternativa x é a vencedora, tal como o método de Condorcet. Já no terceiro exemplo, que não tinha um vencedor de Condorcet, temos que:

	Alan	Bruna	Carol
1ª opção	y = 3	x = 3	z = 3
2ª opção	x = 2	z = 2	y = 2
3ª opção	z = 1	y = 1	x = 1

Tabela 13 – Sistema de Borda - Resultado II

Assim,

$$x = 3 + 2 + 1 = 6$$

$$y = 3 + 1 + 2 = 6$$

$$z = 3 + 2 + 1 = 6$$

Perceba que, diferente do método de Condorcet que implicava num ciclo indefinido na tomada de decisão, pois x vence y que vence z que vence x que vence y que vence z que....infinitamente. Aqui, com Borda, tem-se um resultado: empate entre as alternativas.

Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898)

Charles Dodgson, um matemático em Oxford, é mais conhecido como Lewis Carroll, autor de *Alice's Adventures in Wonderland*. Segundo McLean (1995), a época de ouro da teoria da escolha social terminou por volta de 1840. Para ele, Dodgson redescobriu, de forma independente, os trabalhos de Condorcet e Borda.

No trabalho *Discussion of the Various Methods of Procedure in Conducting Elections*, Dodgson (1876) advogava o que seria o método de Condorcet com a utilização do método de Borda em caso de empates. Neste trabalho, ele captou muito bem algumas das contradições presentes em alguns métodos de votação. A partir daí, ele desenvolveu sua teoria sobre votação e ficou surpreso em descobrir a ocorrência de ciclos decisórios. Na figura 2 a seguir tem-se um exemplo disso.

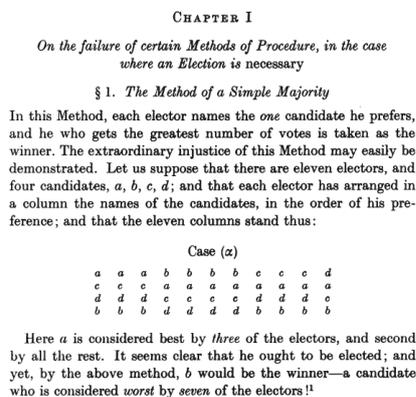


Figura 2 – Extrato do livro Dodgson (1876)

Para ele:

The instances I have taken seem to show that neither of these courses can be relied on to give a satisfactory result. But there is a stronger, and as I think a fatal, objection to both; namely, that any elector, who had not consented to this course being adopted, would have a very strong ground of appeal against the election if he were able to say 'A was declared elected, and yet he had not "the greatest number of votes" given for him, since he was beaten when paired against B'. The conclusion I come to is that, in the case of persistent cyclical majorities, there ought to be 'no Election'. ((DODGSON, 1876) apud (BLACK, 1958, p.230)).

Se deparar com esses paradoxos fez com que Dodgson concluísse sua obra com uma frase lapidar e explícita sobre como funciona uma eleição e sobre o papel que entender a lógica de cada procedimento se torna fundamental:

This principle of voting makes an election more of a game of skill than a real test of the wishes of the electors, and as my own opinion is that it is better for elections to be decided according to the wish of the majority than of those who happen to have most skill in the game, I think it desirable that all should know the rule by which this game may be won. ((DODGSON, 1876) apud (BLACK, 1958, p.233)).

2.3 Conclusões

Neste capítulo apresentou-se o desenvolvimento histórico da teoria da escolha social, tanto nos aspectos filosóficos quanto nos práticos-procedimentais. Apesar de, aparentemente, caminharem paralelamente, ambos culminam numa base comum: busca-se avaliações sociais tendo como ponto de partida as preferências ordenáveis dos agentes. Nas palavras de Suzumura (2016):

At this juncture, it is worthwhile to observe that the informational basis of the theory of voting à la Borda and Condorcet, social choice theory à la Black and Arrow, and the "new" welfare economics based on the compensation principle and that based on the Bergson-Samuelson social welfare function have one crucial feature in common. Although these various approaches of normative economics are different in many important respects, they share the same feature of basing normative social judgments on ordinal and interpersonally noncomparable individual utilities (or preference orderings), which are defined over the set of all social alternatives (SUZUMURA, 2016, p.14-15).

Além disso, como ressaltou Dodgson, como uma eleição se pareceria muito mais com um jogo do que refletindo, de fato, as preferências das pessoas, deve-se sempre ter noção de como as regras funcionam, pois necessita-se entender as consequências lógicas de qualquer procedimento eleitoral. Neste particular, reside a força da teoria da escolha social, um ramo da ciência normativa que busca, justamente, levar ao limite as distintas regras para tomada de decisão, mostrando seus fundamentos normativos, seus princípios e contradições. No próximo capítulo analisa-se, em detalhe, esses aspectos normativos das distintas regras de votação.

3 Critérios Normativos, Regras de Votação e Agregação de Preferências

O surgimento de distintas regras de agregação de preferência, via sistema de votação, fez com que se discutissem as possibilidades da existência de uma regra que pudesse ser escolhida, entre todas as outras, como a mais eficiente, justa e democrática. Entretanto, estes critérios de eficiência, justiça e ser democrática implicaria, por sua própria natureza, numa discussão de ordem valorativa, necessitando-se discutir os fundamentos normativos que possibilitariam comparar cada regra e, só assim, concluir em prol de um procedimento em relação a um outro.

Ao longo do tempo, percebeu-se que tal discussão não seria trivial, pois cada regra ou procedimento de votação apresenta vantagens e debilidades. Dessa forma, para ter clareza na comparação, necessitou-se desenvolver, formalmente, quais critérios normativos uma regra de votação deveria respeitar. Assim, cada critério normativo, visto isoladamente, representaria uma característica de um sistema eficiente, justo e democrático. Mas, como a democracia não se limita a uma única característica, a ideia é avaliar como cada regra de votação se comporta quando avalia-se os critérios normativos básicos em seu conjunto, simultaneamente.

O objetivo desse capítulo é apresentar os fundamentos normativos que toda regra deveria respeitar e discutir quais vantagens (ou desvantagens) a adoção de uma regra específica implicaria. Além disso, discute-se em qual contexto uma dada regra pode violar algum critério normativo básico que se considera fundamental para um sistema democrático.

O capítulo está estruturado da seguinte forma. Primeiro, define-se quais critérios normativos básicos todas as regras deveriam respeitar e argumenta-se o porquê de cada critério, mostrando a intuição por trás. Na sequência, apresenta-se uma distinção quanto ao número de alternativas disponíveis para escolha: primeiro com duas alternativas; depois com mais de duas. A finalidade de se distinguir pelo número de alternativas, além de ser didático e facilitar a análise, recai justamente nas dificuldades que emergem quando se tem mais do que duas alternativas. Conclui-se o capítulo apresentando o importante teorema de [May \(1952\)](#) que demonstra que a regra de maioria simples é a mais justa quando se tem duas alternativas, mas que tal teorema não se aplica quando existem mais do que duas alternativas de escolha.

3.1 Princípios Normativos Gerais de uma Regra de Votação

A discussão sobre qual regra de votação utilizar é um debate *ex-post* à ideia da necessidade de se ter votação em um ambiente democrático. Diante disso, pode-se perguntar: porque devemos realizar eleições? Se vamos realizar eleições, como devemos proceder? Para a primeira questão a resposta não é difícil. Eleições, num ambiente democrático, é a forma de se resolver os problemas de decisões coletivas e deveriam refletir as visões dos membros dessa coletividade (sociedade). Já a resposta para a segunda pergunta não é trivial, pois implicaria responder a seguinte questão: "*como devemos conduzir as eleições de forma a assegurar que a decisão coletiva represente, da melhor forma possível, as visões dos indivíduos de uma sociedade?*". Em suma, como agregar as preferências individuais distintas numa preferência social (coletiva)?

Para desenvolver o argumento, pode-se partir de uma adaptação da perspectiva filosófica sobre justiça elaborada por Rawls (1971). Para Rawls (1971), a definição de quais critérios normativos básicos que emergiriam na sociedade teriam que ter como base a ideia de tomada de decisão a partir da *posição original sob véu da ignorância*. Dessa forma, como não há conhecimento na sociedade sobre a sua posição inicial e, em função dessa incerteza, tenta-se construir regras mínimas de justiça que caracterizaria como sendo democrática¹. Dessa forma, partindo deste princípio, pode-se perguntar quais princípios normativos mínimos uma regra de votação deveria respeitar para, de fato, ser considerada democrática e justa (SUZUMURA, 1983).

Uma ideia básica que faz parte do imaginário coletivo sobre democracia é a possibilidade de se considerar cada cidadão portando um, e somente um único, voto. Desse modo, em um sistema em que cada eleitor teria o mesmo peso no processo de tomada de decisão, tem-se uma ideia de se ter uma regra justa. Assim, define-se esse princípio básico como sendo um dos fundamentos normativos da democracia que deve estar presente em qualquer regra de votação. Tal critério é denominado *anonimato* e pode-se definir como²:

Definição 1: *Um método satisfaz o critério de **anonimato** se considerar todos os eleitores igualmente.*

A intuição dessa ideia é a seguinte: considere um votação entre duas alternativas (x, y) e cinco eleitores (Alan, Bruna, Carol, Daniel e Elba). Cada eleitor porta a sua preferência entre as duas alternativas. Podemos representar as preferências dos eleitores da seguinte forma: Alan prefere alternativa x à alternativa y ; Bruna prefere x à y ; Carol

¹ Sen (2009), quando discute sua *Teoria da Justiça*, critica esse posicionamento metodológico de Rawls (1971) chamando-o de *institucionalismo transcendental*. Entretanto, como primeira aproximação à ideia da Escolha Social, esse uso faz sentido.

² Esta seção é baseada na estrutura de Jr e Ullman (2010).

prefere x à y ; Daniel prefere x à y e Elba prefere y à x . Assim, tais preferências podem ser apresentadas como se fossem cédulas eleitorais (tabela 14):

	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	x	y
2 ^a	y	y	y	y	x

Tabela 14 – Cédula Eleitoral - I

Chame de V_1 o resultado dessa votação. O que o *princípio do anonimato* nos informa é que o resultado dessa votação (V_1) deve ser o mesmo se tivermos outra votação com a seguinte cédula eleitoral (tabela 15):

	Alan	Daniel	Carol	Bruna	Elba
1 ^a	x	x	x	x	y
2 ^a	y	y	y	y	x

Tabela 15 – Cédula Eleitoral - II

Denote de V_2 o resultado dessa segunda votação. Observe que a única modificação entre o conjunto das cédulas eleitorais foi a *permutação entre os nomes* Bruna e Daniel. Tecnicamente, o que esse princípio nos informa é que, se tivermos uma lista de eleitores ordenados e, outra lista, com os mesmos eleitores e preferências, mas em outra ordem, o resultado da eleição não pode mudar ($V_1 = V_2$).

Em suma, a mera permutação entre os eleitores não deve modificar o resultado da votação, pois pouco importa se começa a contagem dos votos por Alan, que é o primeiro da lista, e se Bruna, Carol, Daniel e Elba vierem na sequência exercerem seus direitos ao voto; permutando-os de posição, *o resultado deve respeitar, estritamente, as preferências de cada um e não a ordem de apresentação da contagem na lista.*

Como o resultado depende das preferências individuais e o resultado é a soma desses votos individuais, o respeito ao anonimato é garantido. Seria de se estranhar, uma regra de votação que tivesse um resultado diferente apenas porque Bruna e Daniel permutaram suas posições. Se assim ocorrer, significa que o voto de alguém teve maior peso do que os demais, violando o *princípio do anonimato*. Logo, a intuição é que qualquer regra de votação deva respeitar a ideia de "*cada eleitor, um voto!*"

Por sua vez, da mesma forma que deve-se considerar todas os eleitores igualmente, deve-se considerar todas as opções de escolha de forma neutra, ou seja, não deve-se dar maior peso a alguns candidatos (alternativas de escolha) em detrimentos de outros. Tal critério é chamado de *neutralidade*:

Definição 2: Um método satisfaz o critério de **neutralidade** se considerar todos as opções de escolhas igualmente.

Esse princípio funcionaria da mesma forma que o anonimato. A mera apresentação de uma lista de alternativas (candidatos) numa ordem não deve implicar em um favorecimento a alguma alternativa, apenas em função da modificação dessa ordem. Assim, o que este princípio da neutralidade diz é que pouco importa a ordem, permutações entre as alternativas não devem modificar o resultado, porque o que define a escolha é a preferência dos eleitores e não a ordem das alternativas. Logo, não deve haver um enviesamento de uma alternativa em detrimento de outra, pois ambas competem em igualdade, ou seja, são neutras. Dessa forma, se todos invertessem suas preferências o resultado de uma votação deve ser exatamente o oposto da outra. Considere o mesmo exemplo (tabela 16):

	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	x	y
2 ^a	y	y	y	y	x

Tabela 16 – Cédula Eleitoral - III

Vimos que o resultado dessa votação foi V_1 . O que aconteceria se todos modificassem suas preferências, invertendo o ordenamento de prioridade para votação? Vejamos (tabela 17):

	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	y	y	y	y	x
2 ^a	x	x	x	x	y

Tabela 17 – Cédula Eleitoral - IV

Evidente que o resultado dessa votação, V_3 , tem que ter exatamente o resultado oposto da votação V_1 . Caso não seja, resulta que alguma alternativa (candidatos, propostas, opções, etc) tem algum peso maior que o outro, deixando de ser neutro. Assim, o respeito à neutralidade também seria um princípio normativo importante para um bom funcionamento de qualquer regra de votação em um ambiente democrático.

O terceiro critério refere-se a aspectos operacionais de uma regra. Imagine que uma alternativa x seja escolhida como a melhor pela coletividade na comparação com uma outra, y . Imagine o seguinte contrafactual: alguém que tinha escolhido a alternativa perdedora y , resolvesse modificar sua escolha para a alternativa vencedora, x . Parece evidente que essa alternativa x deve continuar sendo eleita pela coletividade. Essa é a ideia da *monotonicidade*:

Definição 3: Um método satisfaz o critério de **monotonicidade** se uma alternativa eleita continuar sendo eleita se aumentarmos seu número de votos.

Uma regra de votação que viole o *princípio da monotonicidade* parece ser muito estranha, pois uma alternativa não deve ser penalizada em função de ter recebido mais votos! Dessa forma, deve haver consistência na regra de votação: se uma alternativa foi eleita com um percentual de $x\%$, essa mesma alternativa deve continuar sendo eleita com esse mesmo $x\%+1$ voto. A literatura sobre escolhas sociais e regras de votação também denomina esse critério como *esponsividade positiva* (*positive responsiveness*). Neste sentido, a regra tem que ter responsividade, ser sensível às demandas dos eleitores. Logo, respeitar suas preferências. Aqui utiliza-se tanto monotonicidade quanto responsividade positiva de forma intercambiáveis.

O quarto critério desejável para uma regra de votação é que possa, sempre, chegar em um resultado. Uma regra de votação em que os dilemas e os impasses políticos não possam ser respondidos pela votação implicaria em uma profunda instabilidade do processo decisório. Dessa forma, chegar sempre em um resultado implica em respeitar todas e qualquer forma de preferência. Seria constrangedor (e mesmo antidemocrático) que uma regra de votação não desse resultado em função de eleitores formarem "*preferências estranhas*". Assim, define-se:

Definição 4: *Um método satisfaz o critério de ser **decisivo** se sempre escolher uma alternativa³.*

Observe que tem um detalhe importante aqui. Sempre escolher uma alternativa poderia implicar que sempre existiria uma alternativa vencedora⁴, não permitindo a existência de empate entre as alternativas. Parece ser um critério muito forte, pois em qualquer eleição sempre há a possibilidade de ser ter empates, mesmo sendo improvável em grandes eleições. Entretanto, enquanto critério normativo geral, uma regra não pode ser fluída e depender do tamanho do eleitorado.

Assim, o fato de existir um empate entre alternativas disponíveis, formalmente, não implicaria em não ter sido decisivo: empate é uma decisão fruto das preferências individuais. Logo, sua existência significa que houve, de fato, uma decisão: a indiferença entre as opções. Nas palavras de [May \(1952\)](#):

We might describe this condition by saying that the method must be decisive and universally applicable, or more briefly always decisive, since it must specify a unique

³ [Jr e Ullman \(2010\)](#) fazem uma distinção entre decisividade e quase-decisividade. Na primeira definição não se permite empate, ou seja, sempre tem um vencedor. Na segunda definição permite-se o empate. Aqui, resolvemos seguir o clássico trabalho de [May \(1952\)](#) que apenas definiu decisividade, permitindo a possibilidade de indiferença ser considerada uma decisão.

⁴ A discussão técnica sobre essa questão será vista no próximo capítulo quando apresentaremos a noção de maximalidade e otimização.

decision (even if this decision is to be indifferent) for any individual preferences (MAY, 1952, p.681).

Parece ser evidente que cada um desses princípios, vistos individualmente, representariam, em alguma medida, uma ideia de democracia e funcionamento justo de uma regra de votação: cada eleitor, um voto (anonimato); plena concorrência entre os candidatos (neutralidade); ser responsivo ao eleitor (responsividade positiva); ser capaz de dar um resultado (decisividade). Entretanto, será que se olharmos em conjunto, respeitando os quatro princípios normativos gerais simultaneamente, encontraremos regras de votação que sejam mais democráticas que outras? Além disso, qual desses critérios são violados? Para responder essas questões, precisa-se apresentar algumas regras de votação. Por simplicidade, apresenta-se, na sequência, as regras de votação em dois contextos distintos: i) apenas duas alternativas para escolher; ii) mais do que duas alternativas.

3.1.1 Regras de Votação com duas alternativas

Pensando nos possíveis resultados e na legitimidade de uma votação, seria difícil não aceitar a ideia da unanimidade de uma eleição não representar o resultado com maior legitimidade, pois corresponderia a uma uniformidade plena na "*vontade geral*" dos eleitores. Neste sentido, seria estranho se uma regra de votação desse como resultado uma alternativa que fosse contrária ao consenso coletivo. Dessa forma, se todos concordam que a alternativa x é melhor que a alternativa y , não faz sentido uma regra declarar y como resultado vencedor, pois estaria violando a *vontade declarada dos eleitores*. O problema, como veremos, é que podem existir tantas opiniões distintas quanto membros dessa sociedade, dificultando obter unanimidade.

Quando um conjunto de indivíduos necessitam escolher entre opções distintas que estejam disponíveis para escolha e não existem plena unanimidade, tem-se uma intuição de qual procedimento seria o mais adequado para se realizar tal decisão: votação por maioria simples (*majority rule*). O procedimento de votação por maioria simples, por sua simplicidade e clareza, não gera muitas dúvidas quanto aos critérios de justiça e isonomia, pois acredita-se que o resultado gerado será justo e correto. Além disso, já que leva em consideração as distintas opiniões, a que tiver maioria será declarada vencedora. Essa ideia, para além da intuição, pode ser formalizada matematicamente, revelando os princípios normativos (axiomas) que fundamentam tal racionalidade.

Uma importante distinção quanto ao procedimento de maioria simples deve ser caracterizada. Em geral, quando uma opção tem a maioria dos votos, afirma-se que tal opção teve a pluralidade dos votos (*plurality rule*). Por sua vez, se a opção tiver mais da metade dos votos, a opção teve maioria dos votos. Essa distinção entre *pluralidade e*

maioria será importante quando tivermos situações de mais de duas opções. Com apenas duas alternativas tal distinção não faz sentido, pois, necessariamente, a opção que tiver pluralidade dos votos terá, também, mais da metade dos votos.

Entretanto, quando tem-se mais de duas opções de escolha, pode ocorrer um resultado "indesejado": uma opção pode ter a pluralidade dos votos, mas não ter maioria. Pode ser a opção mais preferida, mas ter menos que a metade dos votos. Para resolver tal problema de legitimidade, pode-se adotar uma votação com dois turnos (*plurality with runoff*), onde as duas opções com mais votos disputarão as preferências por maioria simples.

Formalmente, o resultado do procedimento eleitoral é chamado de *função de escolha social* ou *método de votação*. Uma *função* é uma expressão matemática que relaciona dois valores pertencentes a distintos conjuntos. A lei de formação relaciona cada unidade de um conjunto (domínio) a um resultado em outro conjunto (imagem). Tecnicamente, uma função de escolha social deve fornecer um mesmo resultado sempre que os *inputs* não modifiquem. Assim, se as preferências das pessoas na sociedade permanecerem constantes, o resultado da escolha social deve ser o mesmo. Além disso, uma função de escolha social deve fornecer um resultado para todas as combinações possíveis dos *inputs* disponíveis, ou seja, os indivíduos devem ser livres para terem as preferências que desejarem ter e a função tem que apresentar um resultado final (*output*).

Unanimidade

Uma regra de votação por unanimidade significa que não deve existir divergências entre as opiniões dos eleitores. Essa necessidade implicaria em alguma violação dos princípios normativos básicos?

1. **Anonimato:** Considere o seguinte exemplo.

Votação 1 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	x	x
2 ^a	y	y	y	y	y

Resultado \Rightarrow x eleito

Tabela 18 – Unanimidade - Anonimato I

Observe que o resultado escolhido é a opção *x*, pois foi eleito por unanimidade. Agora perceba que, permutando os eleitores Bruna e Daniel não ocorre modificação no resultado da eleição.

Logo, a *regra de unanimidade não viola o anonimato*.

Votação 1 :	Alan	Daniel	Carol	Bruna	Elba
1 ^a	x	x	x	x	x
2 ^a	y	y	y	y	y

Resultado \Rightarrow x eleito

Tabela 19 – Unanimidade - Anonimato II

2. **Neutralidade:** É fácil verificar que, tal como o anonimato, também não há violação entre as alternativas de escolha, ou seja, ambas opções tem o mesmo peso. Para verificar isso, podemos inverter todas as preferências e, com essa mudança, o resultado oposto tem que ser escolhido. Assim, como a alternativa x foi eleita na primeira, permutando, tem que ser eleita a opção y . De fato, isso ocorre:

Votação 1 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	x	x
2 ^a	y	y	y	y	y

Resultado \Rightarrow x eleito

Tabela 20 – Unanimidade - Neutralidade I

Votação 2 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	y	y	y	y	y
2 ^a	x	x	x	x	x

Resultado \Rightarrow y eleito

Tabela 21 – Unanimidade - Neutralidade II

3. **Responsividade Positiva:** Este critério nos diz que uma alternativa não pode ser prejudicada caso aumente seu número de votos. Considere um exemplo modificado.

Votação 1 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com 3/5 dos votos

Tabela 22 – Unanimidade - Responsividade - I

Aqui, a opção x teve 3/5 dos votos. Suponha uma outra votação, onde Daniel, que havia votado contra essa alternativa x resolve modificar seu voto para x .

Logo, houve um aumento no número de votos para esta opção (de 3/5 para 4/5). *Este critério, então, não é violado.*

Votação 2 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	x	y
2 ^a	y	y	y	y	x

Resultado \Rightarrow x com 4/5 dos votos

Tabela 23 – Unanimidade - Responsividade II

4. **Decisividade:** É fácil verificar que a regra da unanimidade nem sempre será alcançada. O exemplo acima demonstra isso. Mesmo com aumento no número de votos de (3/5) para (4/5) não podemos dizer que a alternativa x será eleita, pois necessita-se de 100% dos votos. Logo, *o critério de decisividade para a regra por unanimidade é violado.*

Votação 1:	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com (3/5) dos votos \Rightarrow sem decisão

Votação 2:	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	x	y
2 ^a	y	y	y	y	x

Resultado \Rightarrow x com (4/5) dos votos \Rightarrow sem decisão

Tabela 24 – Unanimidade - Decisividade I

Maioria Simples

A regra de votação por maioria simples significa uma redução no grau de exigência para definir o resultado de uma votação. Como temos apenas duas alternativas disponíveis para escolha, configura-se que qualquer alternativa que tiver mais da metade dos votos deverá ser considerada a alternativa vencedora. E quanto aos critérios normativos dessa regra?

1. **Anonimato:** Considere o exemplo a seguir. Verifica-se que permutando os eleitores (Alan por Elba) não ocorre modificação no resultado. Logo, *a regra por maioria simples não viola o princípio do anonimato.*

Votação 1 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Votação 2 :	Elba	Bruna	Carol	Daniel	Alan
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Tabela 25 – Maioria Simples - Anonimato

2. **Neutralidade:** Seguindo o mesmo exemplo acima, verifica-se que, se invertermos as preferências dos eleitores, o resultado também será invertido. Logo, *a regra por maioria simples não viola o princípio da neutralidade.*

Votação 1 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Votação 2 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	y	y	y	x	x
2 ^a	x	x	x	y	y

Resultado \Rightarrow y com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow y eleito.

Tabela 26 – Maioria Simples - Neutralidade

3. **Responsividade Positiva:** Evidente que, por essa regra, se uma opção tiver mais da metade do voto, será eleito e continuará sendo eleito caso aumente o número de votos. Logo, *não viola o princípio da responsividade positiva.*

Votação 1 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Votação 2 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	x	y
2 ^a	y	y	y	y	x

Resultado \Rightarrow x com $(4/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Tabela 27 – Maioria Simples - Responsividade

4. **Decisividade:** Considere o mesmo exemplo anterior e um outro modificado (com a inclusão de um novo eleitor). Decisividade é a capacidade de chegar num resultado. Com número ímpar de eleitores, sempre tem um vencedor; com número par, pode ter empate. Relembre que decisividade é a capacidade que uma regra deve ter em escolher uma alternativa. Empate como resultado é uma escolha. Logo, *a regra por maioria simples não viola o critério de decisividade.*

Votação 1 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Votação 2 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba	Fábio
1 ^a	x	x	x	y	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x	x

Resultado \Rightarrow x e y com $(3/6)$ dos votos \Rightarrow empate.

Tabela 28 – Maioria Simples - Decisividade

Maioria Qualificada

A regra por maioria qualificada pode ser entendida como um meio termo entre unanimidade e maioria simples. Tem-se um valor crítico para a aprovação de uma determinada alternativa de escolha e este valor crítico, *quota* (q), impõe um número mínimo de votos que deve ser alcançado para ter-se um resultado. Dessa forma, temos um intervalo para esta *quota* que vai de um valor acima da metade, que é o limite para maioria simples ($q > (1/2)$) até unanimidade ($q = 1$). Aqui, vamos considerar dois casos com *quotas* distintas: $q = (2/3)$ e $q = (3/5)$.

1. **Anonimato:** Como a regra por maioria qualificada é uma versão intermediária entre unanimidade e maioria simples, pode-se afirmar que esta regra não viola o critério do anonimato. Observe o exemplo com permutação entre Alan e Elba:

Votação 1 : $q = (3/5)$	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Votação 2 : $q = (3/5)$	Elba	Bruna	Carol	Daniel	Alan
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Tabela 29 – Maioria Qualificada - Anonimato

2. **Neutralidade:** Da mesma forma, por ser um caso intermediário, a regra de maioria qualificada não viola o princípio da neutralidade. Inversão nas preferências, inverte o resultado:

Votação 1 : $q = (3/5)$	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Votação 2 : $q = (3/5)$	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	y	y	y	x	x
2 ^a	x	x	x	y	y

Resultado \Rightarrow y com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow y eleito.

Tabela 30 – Maioria Qualificada - Neutralidade

3. **Responsividade Positiva:** Evidente que uma alternativa eleita continuará sendo eleita com aumento do seu número de votos. Assim, esta regra não viola o critério de responsividade positiva. Observe que na primeira votação, a alternativa x foi eleita por $(3/5)$ dos votos e continuou sendo eleita quando Daniel modificou seu voto em prol de x :

Votação 1 : $q = (3/5)$	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Votação 2 : $q = (3/5)$	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	x	y
2 ^a	y	y	y	y	x

Resultado \Rightarrow x com $(4/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Tabela 31 – Maioria Qualificada - Responsividade

4. **Decisividade:** Na definição do que seria a regra por maioria qualificada, afirmou-se que uma alternativa seria escolhida caso atingisse, pelo menos, o valor da *quota*. Ora, parece óbvio que, em função disso, pode existir situações em que a regra da maioria qualificada não alcance um resultado. Logo, *esta regra viola o critério da decisividade*. Considere um exemplo com quota igual a $(2/3)$. Com 5 eleitores, o número mínimo para aprovação é simplesmente a multiplicação da quota pelo número de eleitores. Caso dê um valor não-inteiro, arredonda-se para mais. Assim, para aprovação necessita-se de 4 votos. (Aprovação = $(2/3) \times 5 = ((10)/3) = 3,333 \approx 4$).

Votação 1 : $q = (2/3)$	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow sem decisão.

Tabela 32 – Maioria Qualificada - Decisividade

Status-quo

A regra de *status-quo* deve ser aplicada em junção com outra regra. Por exemplo, adotando a regra da maioria simples, pode-se definir a alternativa *y* como o status-quo e a alternativa *x* como a desafiante. Assim, quem tiver maioria simples, vence a votação; em caso de empate, vence a alternativa do *status-quo*. O mesmo procedimento pode ser aplicado à regra da maioria qualificada e a regra da unanimidade. Se uma alternativa não alcançar a quota, vence a alternativa do status-quo (lembre-se que em caso de quota igual a 1 tem-se regra da unanimidade).

1. **Anonimato:** É fácil perceber que esta regra não viola este princípio, pois permutando-se os eleitores, o resultado não muda. Considere a alternativa *y* como a opção do status-quo e a *x* como a desafiante. Considere a regra da maioria simples:

Votação 1:	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Votação 2 :	Elba	Bruna	Carol	Daniel	Alan
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Tabela 33 – Status-quo - Anonimato I

Agora com regra da maioria qualificada:

Votação 1: $q = (3/5)$	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Votação 2 : $q = (3/5)$	Elba	Bruna	Carol	Daniel	Alan
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Tabela 34 – Status-quo - Anonimato II

2. **Neutralidade:** Nos exemplos anteriores, aplicamos a ideia da neutralidade para os casos em que mudanças em todas as preferências deveriam ser refletidas em mudanças na opção vencedora. Demonstramos que em todos os casos acima, sempre se respeitou o critério da neutralidade. Agora, claramente, esta regra viola o critério da neutralidade em função de dar maior peso para a alternativa que faz parte do status-quo. Uma vez que em situação de empate, ao invés de termos indiferença entre as opções, aqui, tem-se uma clara preferência por uma alternativa. Dessa forma, *esta regra viola o critério da neutralidade*. Considere a regra da maioria qualificada:

Votação 1 : $q = (3/5)$	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $3/5$ dos votos \Rightarrow y eleito.

Tabela 35 – Status-quo - Neutralidade I

Observe que, como a quota tem um valor de $(3/5)$ e o empate favorece o status-quo, para a opção desafiante vencer tem que ter mais votos que a quota. Assim, mesmo alcançando a quota, a alternativa x não é eleita.

Para avaliar com regra da maioria simples, temos que fazer duas análises. A primeira com um número ímpar de eleitores e a segunda com um número par de eleitores. Como vimos acima, com número ímpar sempre terá alguma alternativa vencedora; com número par, pode ter empate.

Votação 1 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba	Fábio
1 ^a	x	x	x	y	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x	x

Resultado $\Rightarrow x$ igual y com 3 votos \Rightarrow status-quo vence.

Tabela 36 – Status-quo - Neutralidade II

Logo, como tem-se a possibilidade de empate, uma alternativa será privilegiada em detrimento da outra, ou seja, não será neutra!

3. **Responsividade Positiva:** Uma alternativa vencedora continuará sendo vencedora se alguém modificar seu voto em prol dessa alternativa vencedora. Na regra com maioria simples, o empate favorece o status-quo. Logo, se alguém modificar seu voto em prol da opção do status-quo, tal alternativa continuará sendo vencedora (agora por maioria). Por outro lado, se a alternativa desafiante ao status-quo for a vencedora, continuará a ser se receber um voto a mais de alguém que votava no status-quo. Já com regra de maioria qualificada, em caso de uma alternativa não superar a quota, vence o status-quo. Evidente que se alguém que votava na desafiante modificar seu voto para o status-quo, esta opção continuará vencendo (agora com maioria qualificada). Por sua vez, se a alternativa desafiante é a vencedora, significa que tem mais votos que a quota mínima. Logo, se aumentarmos seu número de votos, tal opção continuará sendo vencedora. Com maioria simples e número ímpar de eleitores:

Votação 1:	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $(3/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Votação 2 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	x	y
2 ^a	y	y	y	y	x

Resultado \Rightarrow x com $(4/5)$ dos votos \Rightarrow x eleito.

Tabela 37 – Status-quo - Responsividade I

Com maioria simples e número par de eleitores:

Votação 1:	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba	Fábio
1 ^a	x	x	x	y	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x	x

Resultado \Rightarrow x = y com 3 votos \Rightarrow status-quo vence

Votação 2 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba	Fábio
1 ^a	x	x	y	y	y	y
2 ^a	y	y	x	x	x	x

Resultado \Rightarrow y com 4 votos \Rightarrow status-quo vence.

Tabela 38 – Status-quo - Responsividade II

Com maioria qualificada:

Votação 1: $q = (3/5)$	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com $3/5$ dos votos \Rightarrow y eleito.

Votação 2 : $q = (3/5)$	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	y	y	y
2 ^a	y	y	x	x	x

Resultado \Rightarrow y com $2/5$ dos votos \Rightarrow y eleito.

Tabela 39 – Status-quo - Responsividade III

4. **Decisividade:** Vimos que a regra de maioria simples não viola este princípio mesmo com número par de eleitores, pois empate é uma decisão. Agora, com status-quo, o empate deixa de ser indiferença entre as alternativas e se escolhe uma única opção. Logo, tem-se um vencedor. Assim, não há violação com o critério de ser decisivo. Entretanto, vimos que a regra de maioria qualificada violava este critério justamente por existir a possibilidade de nenhuma alternativa alcançar o valor da quota. Agora, não alcançar a quota não é mais sintoma de não ter decisão, pois caso não alcance, mantém-se o status-quo. Então, a regra da maioria qualificada com status-quo transforma uma regra que violava a decisividade em uma regra que não viola. Dessa forma, *status-quo não viola este critério normativo básico*.

Vejamos o mesmo exemplo da regra de maioria qualificada com quota igual a $(2/3)$ onde mostramos que tal critério seria violado. Como temos 5 eleitores, o número mínimo para aprovação é simplesmente a multiplicação da quota pelo número de eleitores. Caso dê um valor não-inteiro, arredonda-se para mais. Assim, temos que: Aprovação = $(2/3) \times 5 = ((10)/3) = 3,333 \approx 4$.

Votação 1 : $q = (2/3)$	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com 3 votos \Rightarrow sem resultado.

Tabela 40 – Status-quo - Decisividade I

Agora, o mesmo exemplo acima com status-quo,

Votação 1 : $q = (2/3)$	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com 3 votos \Rightarrow y vence.

Tabela 41 – Status-quo - Decisividade II

Votos Ponderados

A ideia de votos ponderados é, sobre algum critério, dar pesos distintos aos eleitores. Claramente, pela própria definição da regra de votação com pesos distintos entre os eleitores, pode-se perceber que tal regra violará um critério normativo básico: anonimato. Suponha o mesmo exemplo que estamos trabalhando só que agora os eleitores têm pesos distintos. Então, ao invés de se ter uma pessoa, um voto, teremos que considerar no processo de votação não o número de votos de cada alternativa isoladamente, mas considerar os distintos pesos de cada eleitor. Defina o peso de cada eleitor i como sendo (w_i) . Observe que, sem considerar o peso de cada um é a mesma coisa que dar pesos iguais a todos, ou seja, considerar, por exemplo $(w_i = 1, \forall i \in N)$.

Considere o mesmo caso da maioria simples com os seguintes pesos: $w_1 = 0; w_2 = 2; w_3 = 2; w_4 = 2; w_5 = 4$. Para calcularmos a opção vencedora, basta somarmos os pesos e calcular a média.

$$\sum w_i = 10 \Rightarrow 10/2 = 5$$

Assim, com 5 votos uma alternativa vence. Dessa forma, permutação entre os eleitores modifica a estrutura de ponderação entre eles, pois os pesos estão nas pessoas. Logo, o nome importa!

1. **Anonimato:** Na primeira votação, temos os três primeiros votando na opção x com os seguintes pesos: $(0, 2, 2)$. Totalizando 4. Os dois últimos votam em y e têm os seguintes pesos: 2 e 4. Totalizando 6. Fica evidente que, assim, tem-se uma vitória de y . Na segunda votação, com a permutação entre Elba (que tem peso 4) e Alan (com peso 0) modifica-se o resultado da votação.

Votação 1 :	Alan (0)	Bruna (2)	Carol (2)	Daniel (2)	Elba (4)
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow y com 6 votos \Rightarrow y eleito.

Tabela 42 – Votos Ponderados - Anonimato I

Votação 2:	Elba (4)	Bruna (2)	Carol (2)	Daniel (2)	Alan (0)
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x com 8 votos \Rightarrow x eleito.

Tabela 43 – Votos Ponderados - Anonimato II

2. **Neutralidade:** Perceba pelo exemplo abaixo que inversão das preferências não modificam o resultado da votação. Assim, esta regra não viola o critério da neutralidade.

Votação 1:	Alan (0)	Bruna (2)	Carol (2)	Daniel (2)	Elba (4)
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow y com 6 votos \Rightarrow y eleito.

Tabela 44 – Votos Ponderados - Neutralidade I

Votação 1:	Alan (0)	Bruna (2)	Carol (2)	Daniel (2)	Elba (4)
1 ^a	y	y	y	x	x
2 ^a	x	x	x	y	y

Resultado \Rightarrow x com 6 votos \Rightarrow x eleito.

3. **Responsividade Positiva:** Fácil ver que se uma alternativa é vencedora, continuará a ser caso receba um voto a mais.

Votação 1:	Alan (0)	Bruna (2)	Carol (2)	Daniel (2)	Elba (4)
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow y com 6 votos \Rightarrow y eleito.

Tabela 45 – Votos Ponderados - Responsividade I

4. **Decisividade:** Caso adotarmos esta regra de pesos nos votos junto com outra regra, pode acontecer de se ter uma decisão. Com a regra da maioria simples, como vimos,

Votação 2:	Alan (0)	Bruna (2)	Carol (2)	Daniel (2)	Elba (4)
1 ^a	x	x	y	y	y
2 ^a	y	y	x	x	x

Resultado \Rightarrow y com 8 votos \Rightarrow y eleito.

Tabela 46 – Votos Ponderados - Responsividade II

sempre ocorre uma decisão. O mesmo ocorre se adotarmos votos ponderados. Agora, o problema que vimos com a regra da maioria qualificada, de nem sempre ter uma alternativa atingindo uma quota, o mesmo pode ocorrer com pesos nos votos. Pode ocorrer de votos para uma alternativa, ponderando pelo peso relativo de cada eleitor, não alcançar uma dada quota. Dessa forma, deixaria de ser decisivo.

Considere o seguinte exemplo. Assuma uma quota de $(2/3)$. Logo, o valor mínimo será: $(2/3) \times 10 = 6,667 \approx 7$ votos

Votação 1 : $q = (2/3)$	Alan (0)	Bruna (2)	Carol (2)	Daniel (2)	Elba (4)
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow x = 4, y = 6 votos \Rightarrow sem decisão.

Tabela 47 – Votos Ponderados - Responsividade

Por outro lado, se adotarmos, conjuntamente, a regra do status-quo, tal junção possibilita ser decisivo, pois não alcançando uma quota, mantém-se o status-quo.

Ditadura

Vamos definir uma "regra de votação" em que a opinião de uma única pessoa é levada em consideração para definir qual a alternativa vencedora. Evidente que tal "regra" de votação viola o princípio normativo básico do anonimato. Observe também que, partindo dessa definição, a ditadura seria um caso extremo de votos ponderados em que uma única pessoa detém todos os pesos para determinar um resultado. Perceba que, partindo dessa mesma definição, não é necessário que uma mesma pessoa tenha todos os pesos; basta ter o peso suficiente para alcançar uma dada quota. Assim, se para aprovação de uma determinada matéria necessita-se de 60% dos votos e se uma única pessoa detém esse valor, ele não precisa dos 100% dos pesos, seus 60% já o colocaria numa posição ditatorial.

1. **Anonimato:** Vamos assumir que Daniel seja ditador. Logo, a sua preferência será a preferência coletiva. Assim, teremos que, mesmo se todos preferirem x a y e apenas o ditador tiver preferência contrária, essa será escolhida; por sua vez, se permutarmos o ditador de posição, muda-se a decisão coletiva. Dessa forma, violamos o anonimato.

Votação 1 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	x
2 ^a	y	y	y	x	y

Resultado \Rightarrow y eleito.

Tabela 48 – Ditadura - Anonimato I

Votação 2 :	Daniel	Bruna	Carol	Alan	Elba
1 ^a	x	x	x	y	x
2 ^a	y	y	y	x	y

Resultado \Rightarrow x eleito.

Tabela 49 – Ditadura - Anonimato II

2. **Neutralidade:** A neutralidade não será violada pois o ditador se impõe com relação às outras pessoas, não em relação às alternativas a serem escolhidas. Logo, permutando-se as preferências, mudam-se os vencedores, pois a preferência do ditador prevalecerá.

Votação 1 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	x
2 ^a	y	y	y	x	y

Resultado \Rightarrow y eleito.

Tabela 50 – Ditadura - Neutralidade I

Votação 2 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	y	y	y	x	y
2 ^a	x	x	x	y	x

Resultado \Rightarrow x eleito.

Tabela 51 – Ditadura - Neutralidade II

3. **Responsividade Positiva:** Se uma opção (a do ditador) é a escolhida, claro que se aumentarmos um voto para esta, continuará sendo escolhida. Assim, não viola-se este princípio da responsividade positiva.

Votação 1 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	x
2 ^a	y	y	y	x	y

Resultado \Rightarrow y eleito.

Tabela 52 – Ditadura - Responsividade I

Votação 2 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	y
2 ^a	y	y	y	x	x

Resultado \Rightarrow y eleito.

Tabela 53 – Ditadura - Responsividade II

4. **Decisividade:** Evidente que essa regra é decisiva, ou seja, sempre tem uma solução: a posição do ditador! Logo, é decisiva.

Votação 1 :	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba
1 ^a	x	x	x	y	x
2 ^a	y	y	y	x	y

Resultado \Rightarrow y eleito.

Tabela 54 – Ditadura - Decisividade

Resumo

Podemos resumir a discussão apresentando o seguinte quadro:

	Anonimato	Neutralidade	Responsividade	Decisividade
Unanimidade	✓	✓	✓	×
Maioria Simples	✓	✓	✓	✓
Maioria Qualificada	✓	✓	✓	×
Status-quo	✓	×	✓	✓
Votos Ponderados	×	✓	✓	×
Ditadura	×	✓	✓	✓

Fonte - Adaptado de [Jr e Ullman \(2010, p.19\)](#)

Tabela 55 – Resumo das Regras

Observe que a única regra que não viola nenhum dos pressupostos básicos do que seria uma regra de votação democrática é a regra por maioria simples. Todo esse desenvolvimento realizado até aqui pode ser resumido no teorema de [May \(1952\)](#).

Teorema 1 (Teorema de [May \(1952\)](#)): *Uma regra de votação com duas alternativas satisfaz os critérios de anonimato, neutralidade, responsividade positiva e decisividade se, e somente se, for a regra de maioria simples.*

Muitos teóricos sobre a democracia ressaltaram a importância desse resultado nas suas análises e como o teorema de [May \(1952\)](#) deve ser levado em consideração em qualquer discussão sobre procedimentos de votação em ambiente democrático ([DAHL, 1956](#); [DAHL, 1989](#)). O teorema demonstra que quando temos que decidir entre duas alternativas, a regra da maioria simples é a única regra que respeita a igualdade entre os eleitores (anonimato), não é viesada em prol de alguma alternativa (neutralidade), é sensível às preferências dos eleitores (responsividade positiva) e sempre nos oferece um resultado. Vimos que sempre chegar em um resultado pode significar empate. Se tivermos número ímpar de eleitores, essa possibilidade é eliminada. Entretanto, com número par, tal possibilidade sempre pode ocorrer. Uma forma de se eliminar tal resultado é considerar alguma regra de *tie-breaking*. Observe que, assim, se tivermos empate e alguém tiver voto de minerva, viola-se o anonimato; se der empate e nesse caso vencer o status-quo, viola-se a neutralidade. Todas as regras de desempate viola algum princípio (axioma) do teorema de [May \(1952\)](#).

3.1.2 Regras de Votação com mais de duas alternativas

Anteriormente viu-se as seguintes regras (métodos, procedimentos) de votação: unanimidade, maioria simples, maioria qualificada, status-quo, votos ponderados e ditador. Além disso, apresentou-se que pelo Teorema de [May \(1952\)](#) o único método que não viola os quatro princípios normativos básicos é a regra de votação por maioria simples quando tem-se apenas duas alternativas para escolha. Aqui, com mais do que duas alternativas, necessita-se avaliar outras regras de votação.

Nesta seção apresenta-se novas regras de votação para analisar este ambiente com mais alternativas. Além disso, como a complexidade é muito maior, para "demonstrar" que uma regra viola algum princípio normativo básico, construiremos contra-exemplos para cada procedimento de votação. Dessa forma, com o contra-exemplo será suficiente avaliar em que consiste a violação.

O problema que emerge dessa questão é que, pela complexidade diante da quantidade de opções disponíveis para escolha e pelos princípios que baseiam cada regra, existe uma

probabilidade de cada regra de votação apresentar um resultado diferente. Com isso, os eleitores necessitam saber quais princípios cada procedimento adota para efetivar suas escolhas. Aqui, vamos apresentar um exemplo e avaliar os resultados possíveis de cada regra de votação. Além disso, avaliaremos as regras diante dos mesmos princípios normativos básicos visto anteriormente (anonimato, neutralidade, responsividade positiva e decisividade) e apresentaremos novos critérios que são fundamentais diante da complexidade do ambiente.

Novos Critérios Normativos Básicos e Regras de Votação

Vamos definir novos princípios normativos básicos que irão compor nossa estrutura normativa para definir, com clareza, qual método de votação se adequa à ideia de democracia mais fielmente. Considere a seguinte situação: todos os eleitores concordam que uma alternativa é estritamente melhor que outra, ou seja, existe um consenso entre os eleitores. A existência desse consenso significa que a regra de votação deve escolher esta alternativa. Assim, existe unanimidade e deve ser respeitada.

Definição 5: *Um método de votação que respeita o **princípio fraco de Pareto** implica na unanimidade, ou seja, se todos concordam que uma alternativa é melhor que outra, essa alternativa tem que ser eleita.*

Uma variante desse princípio é a versão Forte de Pareto:

Definição 6: *Um método de votação respeita o **critério forte de Pareto** se todos concordam que uma alternativa é fracamente melhor que outra e uma pessoa concorda que essa mesma alternativa é estritamente melhor, essa alternativa deve ser eleita.*

Perceba que, a versão forte de Pareto é o critério utilizado para avaliar eficiência e melhora de bem-estar (ótimo de Pareto).

Uma preocupação fundamental de qualquer sistema democrático é a possibilidade de manipulação do resultado da eleição. Pode-se manipular o resultado fazendo modificações na escala de preferência de tal forma que, agindo assim, pode-se chegar num resultado desejado, "mentindo" sobre sua real preferência; Logo, existe a possibilidade de comportamento estratégico. Com apenas duas alternativas de escolha a possibilidade de comportamento estratégicos é diminuta, mas com mais de duas amplia-se essa possibilidade.

Um critério que deve-se considerar é que, quando tivermos que decidir entre duas alternativas, a existência de uma terceira opção não deve influenciar no ordenamento entre essas duas opções. Assim, se a votação é entre essas duas alternativas, minha avaliação deve ser exclusivamente entre essas duas alternativas, e não a relação entre essas duas

e uma terceira, que seria irrelevante nesta escolha. Em suma, se a escolha é entre o que pensamos entre as alternativas x e y , o resultado da eleição deve refletir nossa preferência em relação a essas duas alternativas e não em relação a uma terceira, z .

Confuso? Veja a seguinte exemplo: você está numa padaria e solicita ao atendente as opções de lanche. O atendente informa que tem pão de queijo e coxinha. Você escolhe pão de queijo. Pouco tempo depois o atendente retorna e diz que tem a opção kibe. Eis que você responde: "então eu quero coxinha!". Perceba que neste caso, a escolha entre as duas primeiras alternativas (pão de queijo vs. coxinha) sofreu interferência de uma terceira (kibe) que nada tinha a ver com a situação. Ora, se coxinha já estava disponível antes e você não a escolheu, então não deveria ser escolhida quando apresentou-se um terceira alternativa. O mais lógico, diante de uma nova alternativa de escolha seria decidir entre a primeira escolha e a nova opção (refletir entre o pão de queijo e kibe). Neste caso, afirmamos que a terceira opção alterou a escolha, ou seja, não foi irrelevante e é justamente o que não queremos⁵!

Existem razões objetivas do porque desse critério ser importante e a questão fundamental é eliminar a necessidade de se buscar informações sobre outras (ou todas) alternativas que não necessariamente estão em consideração. Logo, há uma economia no custo informacional de se buscar novas informações para além das informações sobre as duas alternativas relevantes, reduzindo os custos de transações (BROWN, 1975). Assim, pode-se dizer que outras alternativas seriam irrelevantes. Daí o nome do critério: independência das alternativas irrelevantes.

Definição 7: *Um método de votação deve respeitar a ideia de se ter **independência das alternativas irrelevantes**.*

Com apenas duas alternativas fizemos comparações entre as duas alternativas e quem tivesse maioria era eleita. Aqui, podemos adaptar essa mesma ideia, comparar cada uma das alternativas uma com a outra e verificar se, de fato, alguma alternativa vence outra na comparação aos pares. Logo, com três alternativas de escolha (x, y, z) se a alternativa x vence, por maioria, a opção y e também vence a opção z , comparando aos pares, uma a uma, essa alternativa é chamada de vencedor de Condorcet. Assim, podemos definir:

Definição 8: *Se uma alternativa vencer todas as outras alternativas numa comparação aos pares, essa alternativa será um "**vencedor de Condorcet**" e este método de análise é o critério de Condorcet.*

⁵ Essa anedota, modificada, é atribuída ao filósofo Sidney Morgenbesser. Ver Poundstone (2008).

O conjunto desses princípios gerais (axiomas) será suficiente para demonstrar que nenhuma das regras respeitará todas, simultaneamente. Vejamos novas regras de votação.

Pluralidade

Vimos que em uma eleição com duas alternativas a votação por maioria simples sempre nos informa a opção com maioria dos votos. Quando temos mais de duas alternativas, nem sempre temos maioria numa única alternativa. Assim, temos que partir para a regra da pluralidade: uma alternativa é vencedora em uma regra plural se tiver mais votos. Observe que "ter mais votos" não necessariamente implica em ter "maioria" dos votos. Considere uma eleição entre três alternativas com os seguintes perfis de preferências (onde o valor em percentual significa a quantidade de votos para cada preferência):

	44%	28%	28%
1ª opção	y	x	z
2ª opção	x	z	x
3ª opção	z	y	y

Tabela 56 – Votação Pluralidade - Exemplo 1

Observe que não temos nenhuma alternativa eleita por maioria simples. Assim, por pluralidade, teremos eleição da alternativa y com 44% dos votos. Um problema com esse método é que a alternativa vencedora por pluralidade, de fato, é a alternativa com pior *rank* da ampla maioria da sociedade: 56% das pessoas colocaram esta alternativa em último lugar. Dessa forma, teríamos um resultado, no mínimo, indesejado para um sistema democrático. Entretanto, tal método não está violando o critério de ser decisivo, mas viola o critério de Condorcet. Comparando aos pares, esta mesma opção vencedora y perde para a alternativa x (por 2 a 1).

Considere o seguinte exemplo com duas alternativas:

	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba	Fábio	Gloria
1ª opção	x	x	x	x	y	y	y
2ª opção	y	y	y	y	x	x	x

Tabela 57 – Votação Pluralidade - Exemplo 2

Observe que por esse perfil, a alternativa x é a vencedora por maioria contra a alternativa y . O que acontece se colocarmos uma nova alternativa, z ?

Perceba que não houve alteração no rank entre as duas alternativas x e y ; quem preferia uma a outra antes, continuou com o mesmo ordenamento entre essas duas alternativas. Ora, mas com a introdução de uma terceira alternativa ocorre uma mudança na alternativa vencedora: y vence contra x . Isto é uma violação do critério de independência

	Alan	Bruna	Carol	Daniel	Elba	Fábio	Gloria
1ª opção	x	x	z	z	y	y	y
2ª opção	y	y	x	x	x	x	x
3ª opção	z	z	y	y	z	z	z

Tabela 58 – Votação Pluralidade - Exemplo 3

das alternativas irrelevantes: a discussão é o ordenamento entre x e y; se uma vence antes, deveria vencer depois, pois o ordenamento entre exclusivamente estas duas, não se alterou.

Pluralidade com Dois Turnos (runoff)

Vimos que um dos problemas da pluralidade é ter um alternativa vencedora, mas que tenha a pior avaliação da maioria. Uma possibilidade de se contornar esse aparente resultado "ilegítimo" seria adotar a regra da pluralidade com dois turnos: os dois candidatos mais votados no primeiro turno vão para o segundo turno e vence quem tiver maioria simples. O problema desse método é que pode violar o critério de responsividade positiva, ou seja, uma alternativa vencedora pode perder caso recebesse mais votos! Considere o exemplo a seguir com 13 eleitores e 4 alternativas:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1ª opção	w	w	x	x	x	x	y	y	y	z	z	w	w
2ª opção	x	x	w	w	w	w	z	z	z	w	w	y	y
3ª opção	y	y	y	y	y	y	x	x	x	y	y	x	x
4ª opção	z	z	z	z	z	z	w	w	w	x	x	z	z

Tabela 59 – Votação *Runoff* - Exemplo 1

No primeiro turno, cada eleitor vota na sua primeira opção; assim, por pluralidade, tem-se como resultado:

Alternativas	Total Votos
w	4
x	4
y	3
z	2

Tabela 60 – Votação *Runoff* - Resultado Intermediário

Logo, no segundo turno, entre w e x, os eleitores que votaram nas alternativas eliminadas, seguirão suas escalas de preferências distribuindo seus votos. Logo, o resultado será:

Alternativas	Total Votos
w	6
x	7

Tabela 61 – Votação *Runoff* - Resultado Final

Observe que a alternativa vencedora, por maioria simples, foi a alternativa x. O que aconteceria se duas pessoas que votariam na alternativa w, agora, escolhessem x? Considere o exemplo:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1ª opção	x	x	x	x	x	x	y	y	y	z	z	w	w
2ª opção	w	w	w	w	w	w	z	z	z	w	w	y	y
3ª opção	y	y	y	y	y	y	x	x	x	y	y	x	x
4ª opção	z	z	z	z	z	z	w	w	w	x	x	z	z

Tabela 62 – Votação *Runoff* - Exemplo 2

Observe que a única mudança que fizemos foi inverter a ordem de preferências das duas primeiras pessoas (A e B): antes a primeira opção era w e agora x, justamente a alternativa que venceu a eleição anterior. Assim, o resultado será:

Alternativas	Total Votos
w	2
x	6
y	3
z	2

Tabela 63 – Votação *Runoff* - Resultado Intermediário 2

Perceba que na primeira situação a alternativa vencedora (x) foi para o segundo turno empatado com (w) ambas com 4 votos. Agora, x obteve quase a maioria simples para vencer no primeiro turno mas irá para o segundo contra y. No segundo turno teremos:

Alternativas	Total Votos
y	7
x	6

Tabela 64 – Votação *Runoff* - Resultado Final 2

Logo, uma alternativa que foi vencedora antes, foi derrotada mesmo tendo mais votos no primeiro turno: violação do princípio na responsividade positiva!

Condorcet

O paradoxo mais famoso dentro da literatura sobre regras e procedimentos eleitoriais é o paradoxo de Condorcet. A regra de Condorcet é fazer comparações aos pares (avaliar uma alternativa contra outra). Assim, quem conseguir vencer as alternativas rivais nesta comparação deveria ser considerada vencedora. O problema desse método é que pode não gerar um resultado e caminhar em círculos infinitos. Considere o seguinte exemplo:

	A	B	C
1ª opção	x	y	z
2ª opção	y	z	x
3ª opção	z	x	y

Tabela 65 – Votação de *Condorcet*

Observe que não há resultado por maioria simples: cada alternativa tem um voto. Se compararmos aos pares teremos:

x contra y	=	x
x contra z	=	z

y contra x	=	x
y contra z	=	y

z contra x	=	z
z contra y	=	y

Tabela 66 – Votação de *Condorcet* - Resultado

Logo, cada alternativa vence apenas uma outra, não tendo nenhuma que vença as duas oponentes. Assim, não é capaz de dar um resultado, violando o princípio da decisividade.

Borda

Um problema dos métodos que vimos até agora é que ocorre um processo de descarte de informações relevantes para correta análise da função de preferência social. Quando se leva apenas as informações das ordens das preferências das pessoas, perdem informações sobre a posição (intensidade) que cada alternativa tem na escala de valores de uma pessoa. Dessa forma, o método de Borda tenta corrigir esse problema dando pontos às alternativas dentro da escala de preferência. Com isso, possibilita levar em consideração todas as informações presente dentro de cada escala de preferência. Entretanto, por ser possível construir escalas via pontos, apresenta-se problemas de inconsistência com um princípio básico: independência das alternativas irrelevantes. Considere o seguinte exemplo:

	A	B	C
1ª opção	x	z	z
2ª opção	y	x	x
3ª opção	z	y	y

Tabela 67 – Votação de *Borda*

Para cada alternativa vamos designar pontos da seguinte forma: 2 pontos para alternativa na primeira posição, 1 ponto para segunda e 0 para a terceira. Assim:

	1ª	2ª	3ª	Total
x	2	2	0	4
y	0	1	0	1
z	4	0	0	4

Tabela 68 – Votação de *Borda* - Resultado

Observamos um empate entre as alternativas x e z (com 4 pontos). Observe que a disputa relevante é entre x e z. Logo, o resultado depende exclusivamente da ordem de preferência entre essas duas alternativas. Perceba o que acontece quando modificamos a relação entre x e y sem alterar a ordem de preferência dos eleitores em relação às alternativas x e z:

	A	B	C
1ª opção	x	z	z
2ª opção	y	y	x
3ª opção	z	x	y

Tabela 69 – Votação de *Borda* - Exemplo 2

Todos continuam com as suas preferências entre as alternativas relevantes ordenadas de acordo com suas escalas valorativas. Agora, a pessoa B resolveu elevar a alternativa y para sua segunda melhor opção, mantendo a opção z melhor que x, tal como antes. O resultado será:

	1ª	2ª	3ª	Total
x	2	1	0	3
y	0	2	0	2
z	4	0	0	4

Tabela 70 – Votação de *Borda* - Resultado Final

A alternativa vencedora (Borda winner) passa a ser z. No próximo capítulo vamos mostrar que por esse critério é fácil ocorrer manipulação (comportamento estratégico) entre os eleitores.

Hare e Coombs

Os métodos de Hare⁶ e Coombs são métodos de eliminações sucessivas. A diferença é que em Hare, eliminam-se as alternativas com menos votos na primeira posição e sucessivamente vai eliminando até encontrar o vencedor que sobrevive às eliminações. Já para Coombs o processo de eliminação deve começar com a alternativa que tiver mais votos na última posição. Ambos os métodos violam o princípio da independência e responsividade positiva. Considere o seguinte exemplo com as preferências de 17 eleitores⁷:

	6	5	4	2
1ª opção	x	z	y	y
2ª opção	y	x	z	x
3ª opção	z	y	x	z

Tabela 71 – Votação de *Hare*

Pelo método de Hare temos que eliminar a alternativa com menor número de votos na primeira posição. Assim, eliminamos a alternativa z com 5 votos (as alternativas x e y apresentam 6 votos cada). Com isso, temos que:

	6	5	4	2
1ª opção	x	x	y	y
2ª opção	y	y	x	x

Tabela 72 – Votação de *Hare* - Resultado Parcial 1

Agora, eliminamos a alternativa y e vence a alternativa x com 11 votos. Para avaliarmos a responsividade positiva (ou monotonicidade) devemos verificar que uma alternativa vencedora deixará de ser caso receba mais votos. Assim, :

	6	5	4	2
1ª opção	x	z	y	x
2ª opção	y	x	z	y
3ª opção	z	y	x	z

Tabela 73 – Votação de *Hare* - Resultado Parcial 2

Perceba que a única modificação nos perfis foi alteração na escala de preferência de duas pessoas (a última coluna) que passaram a votar na alternativa x como primeira opção (lembre-se que tal alternativa foi a vencedora). Agora, eliminamos a alternativa y com apenas 4 votos ficando com:

⁶ O método de Hare é conhecido na literatura com os seguintes nomes: instant run-off, single transferable vote, ou plurality with elimination.

⁷ Exemplo de [Jr e Ullman \(2010, p.68\)](#).

	6	5	4	2
1ª opção	x	z	z	x
2ª opção	z	x	x	z

Tabela 74 – Votação de *Hare* - Resultado Final

Dessa vez, a alternativa eliminada é a x pois z vence com 9 votos contra 8. Logo, viola a monotonicidade. Para verificarmos como o método de Coombs viola a independência considere o mesmo exemplo de Hare. Aqui, temos que começar a eliminação sucessiva pelas alternativas que são alocadas como a última opção.

	6	5	4	2
1ª opção	x	z	y	y
2ª opção	y	x	z	x
3ª opção	z	y	x	z

Tabela 75 – Votação de *Coombs*

Assim, eliminamos a alternativa z com 8 voto.

	6	5	4	2
1ª opção	x	x	y	y
2ª opção	y	y	x	x

Tabela 76 – Votação de *Coombs* - Resultado Parcial 1

Na sequência eliminamos a alternativa y com 11 votos, restando a alternativa vencedora, x. Observe que entre as alternativas x e y houve vitória de x. Agora, vamos modificar a escala de preferência fazendo com que duas pessoas (última coluna) resolvesse posicionar a alternativa z no topo, sem modificar sua ordem entre x e y.

	6	5	4	2
1ª opção	x	z	y	z
2ª opção	y	x	z	y
3ª opção	z	y	x	x

Tabela 77 – Votação de *Coombs* - Resultado Parcial 2

Assim, perceba que as alternativas z e x ambas tem 6 votos como sendo as piores alternativas. Vamos considerar a escala da "segunda pior": x é eliminada por 5 a 4.

	6	5	4	2
1ª opção	y	z	y	z
2ª opção	z	y	z	y

Tabela 78 – Votação de *Coombs* - Resultado Final

Logo, a alternativa com pior rank é a z. Com isso, vence a alternativa que sobreviver à eliminação sucessiva: alternativa y, violando o princípio da independência das alternativas irrelevantes.

Resumo

Podemos resumir a discussão apresentando o seguinte quadro:

	Anon.	Neut.	Resp.	Deci.	Pare.	Inde.
Pluralidade	✓	✓	✓	×	✓	×
Runoff	✓	✓	✓	✓	✓	×
Condorcet	✓	✓	✓	×	✓	✓
Borda	✓	✓	✓	✓	✓	×
Hare	✓	✓	×	×	✓	×
Coombs	✓	✓	×	×	✓	×

Fonte: Adaptado de [Jr e Ullman \(2010, p.74\)](#)

Tabela 79 – Resumo Completo das Distintas Regras

Fica evidente que, diferente de uma votação com duas alternativas, a votação com mais de duas alternativas não apresenta nenhuma regra de votação que, simultaneamente, possa respeitar os critérios normativos básicos. Assim, não existe um correspondente ao teorema de [May \(1952\)](#) para mais de duas alternativas. Como veremos a seguir, o problema de não se ter com clareza um método que possa ser considerado o mais justo é que, para cada regra de votação pode-se ter um resultado diferente. Logo, a regra importa (e muito!) em qualquer sistema democrático.

3.2 Várias regras, um único resultado?

Considere um eleitorado com 110 pessoas que necessita escolher entre cinco alternativas distintas (x, y, z, w, k) . A tabela a seguir representa o perfil de escolha⁸:

	36	24	20	18	8	4
1ª opção	x	y	z	w	k	k
2ª opção	w	k	y	z	y	z
3ª opção	k	w	k	k	w	w
4ª opção	z	z	w	y	z	y
5ª opção	y	x	x	x	x	x

Tabela 80 – Exemplo de Votação

Vamos considerar 8 regras de votação:

⁸ Exemplo de [Wallis \(2014, p.34\)](#).

1. Unanimidade: claramente não tem um resultado, pois cada eleitor tem preferências distintas na primeira opção.
2. Maioria Simples: como temos 110 eleitores, maioria simples será 56 eleitores. Logo, não temos vencedor.
3. Pluralidade: a alternativa vencedora é x com 36 votos.
4. Pluralidade com dois turnos: as duas opções com maior número de votos no primeiro turno foram x e y com 36 e 24 votos, respectivamente. No segundo turno, 20 pessoas que votaram em z no primeiro turno preferem y a x; 18 pessoas que votaram em k no primeiro turno preferem y a x; e 4 pessoas que votaram em k também preferem y a x. Logo, y vence no segundo turno com maioria simples de 74 votos.
5. Condorcet: a única alternativa que vence todas as outras numa comparação direta, entre as duas, é a alternativa k:

k contra x	⇒ vence k com 74 votos
k contra y	⇒ vence k com 66 votos
k contra z	⇒ vence k com 72 votos
k contra w	⇒ vence k com 56 votos

Tabela 81 – Resultado de Condorcet

6. Borda: temos que dar pontos às alternativas de acordo com a escala de preferências.

	36	24	20	18	8	4
1ª opção: peso 5	x	y	z	w	k	k
2ª opção: peso 4	w	k	y	z	y	z
3ª opção: peso 3	k	w	k	k	w	w
4ª opção: peso 2	z	z	w	y	z	y
5ª opção: peso 1	y	x	x	x	x	x

Tabela 82 – Resultado de Borda

Logo, vence w com 382 pontos.

x:	$(5)(36)+(4)(0)+(3)(0)+(2)(0)+(1)(24+20+18+8+4)=254$
y:	$(5)(24)+(4)(20+8)+(3)(0)+(2)(18+4)+(1)(36)=312$
z:	$(5)(20)+(4)(18+4)+(3)(0)+(2)(36+24+8)+(1)(0)=324$
w:	$(5)(18)+(4)(36)+(3)(24+8+4)+(2)(20)+(1)(0)=382$
k:	$(5)(8+4)+(4)(24)+(3)(36+20+18)+(2)(0)+(1)(0)=378$

Tabela 83 – Pontos de Borda

7. Hare: nesta regra, temos que eliminar a alternativa com menor número de votos na primeira posição. Assim, eliminamos na primeira rodada a alternativa k que possui

apenas 12 votos na primeira posição; na segunda rodada eliminamos a alternativa w; na terceira rodada eliminamos a alternativa y com 32 votos; na quarta, e última rodada, com apenas duas alternativas, por maioria simples, elimina-se a alternativa x. Logo, vence z por maioria após eliminações sucessivas.

Rodada I	36	24	20	18	8	4
1ª opção	x	y	z	w	k	k
2ª opção	w	k	y	z	y	z
3ª opção	k	w	k	k	w	w
4ª opção	z	z	w	y	z	y
5ª opção	y	x	x	x	x	x

Tabela 84 – Eliminação de Hare - I

Rodada II	36	24	20	18	8	4
1ª opção	x	y	z	w	y	z
2ª opção	w	w	y	z	w	w
3ª opção	z	z	w	y	z	y
4ª opção	y	x	x	x	x	x

Tabela 85 – Eliminação de Hare - II

Rodada III	36	24	20	18	8	4
1ª opção	x	y	z	z	y	z
2ª opção	z	z	y	y	z	y
3ª opção	y	x	x	x	x	x

Tabela 86 – Eliminação de Hare - III

Rodada IV	36	24	20	18	8	4
1ª opção	x	z	z	z	z	z
2ª opção	z	x	x	x	x	x

Tabela 87 – Eliminação de Hare - IV

8. Coombs: este método é parecido com o de Hare mas elimina-se sucessivamente a alternativa que tiver mais votos na última colocação. Então na primeira rodada eliminamos a alternativa x; na sequência a alternativa y; alternativa z é eliminada na sequência e, por maioria simples, vence a alternativa w.

Rodada I	36	24	20	18	8	4
1ª opção	x	y	z	w	k	k
2ª opção	w	k	y	z	y	z
3ª opção	k	w	k	k	w	w
4ª opção	z	z	w	y	z	y
5ª opção	y	x	x	x	x	x

Tabela 88 – Eliminação de Coombs - I

Rodada II	36	24	20	18	8	4
1ª opção	w	y	z	w	k	k
2ª opção	k	k	y	z	y	z
3ª opção	z	w	k	k	w	w
4ª opção	y	z	w	y	z	y

Tabela 89 – Eliminação de Coombs - II

Rodada III	36	24	20	18	8	4
1ª opção	w	k	z	w	k	k
2ª opção	k	w	k	z	w	z
3ª opção	z	z	w	k	z	w

Tabela 90 – Eliminação de Coombs - III

Rodada IV	36	24	20	18	8	4
1ª opção	w	k	k	w	k	k
2ª opção	k	w	w	k	w	w

Tabela 91 – Eliminação de Coombs - IV

Em suma, para cada regra, tem-se um resultado diferente. Assim, demonstra-se a centralidade e importância das regras eleitorais.

3.3 Conclusões

Neste capítulo apresentou-se a ideia de que construir uma regra de votação que respeite princípios básicos defronta-se com problemas quando existem mais de duas alternativas de escolha. Quando existem apenas duas, claramente, uma regra é melhor

que as outras (regra de maioria simples) como ficou demonstrado no importante teorema de [May \(1952\)](#). Cabe reforçar que, a qualificação "melhor que" refere-se, exclusivamente, em respeito aos princípios normativos básicos (axiomas) de uma certa ideia de regra democrática.

Evidente que, toda regra de tomada de decisão coletiva, violando alguma condição do teorema de [May \(1952\)](#) pode ser justificada para cada contexto específico. Por exemplo, a adoção da regra de maioria qualificada (violando neutralidade) para discussão sobre emenda constitucional é um procedimento razoável e que traz segurança jurídica-política para resguardar garantias básicas. A ideia de uma democracia consociativa ([LIJPHART, 1969](#)), com partilha de poder e poderes de veto (violando o anonimato e decisividade) faz muito sentido em uma sociedade plural com dificuldade de consensos e respeito às minorias. Embora tais procedimentos violem alguns princípios básicos, ainda assim são compatíveis com a democracia. Além disso, podem coexistir amplas variedades de regras para cada situação dentro de um mesmo ordenamento jurídico.

O ponto fundamental aqui é que, como regra importa e cada regra pode gerar resultados distintos, a compreensão dos mecanismos formais de cada regra e os resultados esperados podem ser corroborados pela literatura da escolha social. Entender qual o limite e o que se perde (e ganha) sob cada regra só pode ser alcançado estressando todas as possibilidades lógicas: para isso a construção axiomática é fundamental. Neste particular, a literatura da escolha social dialoga muito bem com a teoria democrática e a discussão de regras de votação. No próximo capítulo apresenta-se, em detalhes, o teorema da impossibilidade de Arrow e alguns resultados correlatos. Além disso, apresentam-se possíveis "rotas de fuga" dessas impossibilidades, ressaltando o papel central que deliberação pode ter nesse procedimento.

4 Teoremas de Impossibilidades: Arrow, Gibbard-Satterthwaite e Sen

No capítulo 3 apresentou-se uma discussão sobre regras e procedimentos de escolha social derivada das preferências individuais. Observou-se que, com duas alternativas para serem escolhidas, a regra de votação por maioria simples, sem dúvidas, é a regra que respeita os princípios normativos básicos sobre o que seria uma regra democrática e o teorema de [May \(1952\)](#) consagra essa ideia. Entretanto, com mais do que duas alternativas para serem escolhidas, não há, claramente, um método que seja melhor do que outro, respeitando os mesmos princípios básicos. Logo, não existe um correspondente ao teorema de [May \(1952\)](#) nesta situação.

Quando há a possibilidade de se realizar eleições com mais de duas opções de escolhas, a complexidade e as variações possíveis se tornam enormes. Evidente que, em um ambiente democrático, a liberdade de escolha é um imperativo importante. Dessa forma, as regras de votações devem ser capazes de produzirem um resultado de acordo com as preferências dos eleitores. Assim, cada eleitor poderá dispor de uma lista ordenada de preferências entre as alternativas disponíveis para votação e o conjunto de eleitores, cada um com sua própria lista ordenada de preferências, apresentará um perfil de escolha social. Diante desse perfil de escolha social, o método que determina a forma procedimental para cálculo do vencedor precisa ser o mais responsivo possível, ou seja, o resultado necessita ser o mais fiel possível à esse perfil eleitoral.

Para se ter clareza da complexidade quando se tem mais do que duas alternativas disponíveis para escolha, observe o seguinte: vimos que a regra de votação funciona como uma função matemática que conecta os valores do domínio e associa um dado resultado. Esse domínio é representado pelos perfis de escolhas de todos os eleitores, que fazem um ordenamento das opções de forma livre. Assim, se tivermos três opções de escolha (x, y, z) cada eleitor deverá ser livre para poder fazer as seguintes escolhas: x é melhor que y , que é melhor que z ; x é melhor que z , que é melhor que y ; y é melhor que x , que é melhor que z ; y é melhor que z , que é melhor que x ; z é melhor que x , que é melhor que y ; z é melhor que y , que é melhor que x . Para facilitar, considere a seguinte tabela de ordenamento das preferências desse eleitor com todas as suas possibilidades:

Observe que, cada eleitor, diante de três alternativas de escolha, pode ordenar 6 tipos diferentes de preferência; e para cada eleitor (cada um com suas 6 opções de ordenamento) a regra de votação tem que ser capaz de associar todo esse conjunto de

	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4	Ordem 5	Ordem 6
1ª opção	x	x	y	y	z	z
2ª opção	y	z	x	z	x	y
3ª opção	z	y	z	x	y	x

Tabela 92 – Ordenação Completa das Preferências

escolhas (perfil), um dado resultado. Logo, a regra tem que ser capaz de produzir um resultado diante dessa complexidade. Tecnicamente, o termo que é utilizado para designar essa característica da função de escolha é dizer que o domínio é irrestrito. Tal característica será fundamental quando apresentarmos o teorema de Arrow. Para se avaliar o tamanho do problema, se tivermos apenas dois eleitores e três alternativas, teremos $6^2 = 36$ possíveis perfis e para cada um desses 36 perfis podemos ter 7 resultados (vitória de x; vitória de y; vitória de z; empate entre x e y; empate entre x e z; empate entre y e z; empate entre x,y,z). Logo, teremos 7^{36} alternativas distintas para escolher uma função social que represente à coletividade (de apenas duas pessoas!). Este número é gigantesco... imagine a complexidade quando tivermos um eleitorado de 10, 50, 1000.... Diante disso, quantas regras (funções de escolhas sociais) podem ser consistentes? Nas palavras de [Arrow \(1952\)](#):

Certain properties which every reasonable social choice function should possess are set forth. The possibility of fulfilling these conditions is then examined. If we are lucky, there will be exactly one social choice function that will satisfy them. If we are less fortunate, there can be several social choice functions satisfying the conditions or axioms. Finally, it will be the height of bad luck if there exists no function fulfilling the desired conditions ([ARROW, 1952](#)).

Essa é a dramaticidade do teorema da impossibilidade de Arrow que veremos a seguir: diante de tamanha opção de escolha, não existirá uma única que seja capaz de representar a escolha agregada, seguindo certos princípios normativos básicos!

4.1 Condições Normativas do Teorema de Arrow

O ponto de partida para a análise do teorema de Arrow é uma discussão sobre as preferências individuais. Considere que exista uma sociedade com n indivíduos, indexados pelos números $(1, 2, \dots, n)$, que compõe um conjunto de tamanho $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Para evitar trivialidades, considere que existam, pelo menos, 3 indivíduos. Além disso, considere que exista um outro conjunto X , finito, correspondente às alternativas que precisam ser escolhidas. Da mesma forma, considere que tal conjunto contenha, pelo menos, 3 alternativas. Cada um desses indivíduos tem uma relação de preferência sobre esse conjunto

X. Assim, cada indivíduo i apresenta um ordenamento neste conjunto, representado por \succeq_i . Assim, a sociedade será representada por um perfil.

$$\succeq = (\succeq_1, \succeq_2, \dots, \succeq_n)$$

Este perfil representa o ordenamento social. Dessa forma, cada indivíduo forma seu próprio ranking entre as alternativas disponíveis. A importância do teorema de Arrow recai, justamente, na forma como trata este perfil. A ideia de Arrow não é estudar um perfil específico ou um conjunto de perfis; Arrow generalizou a questão assumindo que existe uma função que define a preferência social para qualquer perfil possível derivado das preferências individuais.

Assim, se denominarmos como \mathbb{R}_i a relação de preferência de cada indivíduo, tem-se, então, \mathbb{R}^n relações de preferências. Dessa forma, busca-se então:

$$f = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_i$$

A partir daqui, Arrow começa a desenvolver quais critérios (axiomas) esta função de escolha social deve respeitar.

4.1.1 Domínio Irrestrito

A ideia desse primeiro axioma é que a função de escolha social possa ser aplicada à qualquer ordenação das alternativas disponíveis para escolha. Com isso, deve-se respeitar todas as formas de preferências que os indivíduos dessa sociedade possam apresentar. Neste sentido, os indivíduos são livres para definirem suas preferências e escolhas, sejam essas quais forem. Logo, não deve-se restringir, a priori, o domínio da função das distintas preferências individuais. Observe que, todos os perfis (todas as n-uplas relações individuais) estão sendo consideradas.

Definição (condição U): *O domínio da regra de agregação f deve incluir todas as combinações logicamente possíveis dos ordenamentos dos indivíduos.*

4.1.2 Princípio Fraco de Pareto

O problema da escolha social é que existem indivíduos com distintas preferências. Entretanto, podem existir situações em que as multiplicidades de opiniões se transformem em consenso coletivo (e a condição U acima nos garante essa possibilidade). Dessa forma, seria razoável supor que, nessas condições de plena concordância das preferências

(unanimidade), a regra de votação refletisse essa possibilidade. Se todos os indivíduos concordam que uma alternativa é melhor que uma outra, então essa alternativa deve ser escolhida, refletindo a vontade geral, o consenso coletivo, entre todos os indivíduos. Seria de se estranhar que uma regra de votação não respeitasse essa vontade geral revelada.

Definição (condição P): *Para qualquer par de alternativas disponíveis, se todos concordam que uma alternativa é melhor que a outra, essa alternativa tem que ser escolhida.*

4.1.3 Independência das Alternativas Irrelevantes

Uma das dificuldades em se tomar decisão sobre distintas alternativas disponíveis é que para se ter clareza sobre as escolhas devem-se arcar com os custos informacionais. Quanto mais alternativas, maiores os custos e as dificuldades. Dessa forma, para reduzir esses custos, quando tem-se duas alternativas disponíveis (x,y) , não há a necessidade de se comparar essas duas alternativas com outras possíveis alternativas. Logo, deve existir uma independência entre as alternativas. Assim, a escolha social entre essas duas alternativas deve refletir as preferências, exclusivamente, em torno dessas duas alternativas.

Definição (condição I): *As preferências entre duas alternativas x e y devem depender apenas de como as pessoas ordenam x em relação a y , e não de como ordenam as outras alternativas.*

4.1.4 Não-Ditador

Parece ser razoável aceitar que numa regra democrática para definir a escolha social não deva existir nenhum indivíduo que, unilateralmente, imponha sobre a coletividade a sua preferência. Caso se permita a existência de tal indivíduo, certamente, estamos violando uma ideia básica da soberania popular de respeito às preferências individuais e a noção de "uma pessoa, um voto".

Definição (condição N-D): *Não deve existir nenhum indivíduo que imponha sua preferência em relação aos demais.*

4.1.5 Teorema de Arrow

Teorema de Arrow (1951): *Suponha que o número de indivíduos e alternativas seja finito e maior que dois. Então, não existe nenhuma escolha social que satisfaça as condições de domínio irrestrito (U), princípio fraco de Pareto (P), independência das alternativas irrelevantes (I) e não ser ditador (N-D).*

Para se ter clareza do que diz o teorema, pode-se reescrever de outra forma: se

aceitarmos como válidas as condições de domínio irrestrito, princípio fraco de Pareto e independência das alternativas irrelevantes, a regra social será ditatorial.

O que torna este teorema tão desconcertante é que, com apenas quatro princípios normativos básicos gerais, razoáveis, sobre o funcionamento de uma regra de agregação de preferência, se tenha um resultado tão improvável. Todas as discussões que apresentamos no capítulo 3 sobre distintas regras de votação como forma de agregação das preferências coletivas, culmina com esse (forte) resultado. Lá, demonstramos pelo teorema de [May \(1952\)](#) que quando tem-se apenas duas alternativas disponíveis, a regra de maioria simples, de fato, é a única que respeita os princípios normativos básicos. Com mais de três alternativas, vimos com distintos exemplos que não existiam regras que possibilitassem respeitar àqueles mesmos princípios e essa dificuldade em encontrar uma regra, na verdade, é uma impossibilidade, demonstrado por [Arrow \(1951\)](#).

Mas qual a relação entre o teorema de [Arrow \(1951\)](#) e o de [May \(1952\)](#)? Vamos reapresentar o teorema de May e suas condições (axiomas):

1. Anonimato (A);
2. Neutralidade (N);
3. Responsividade Positiva (S);
4. Decisividade (D).

Teorema de [May \(1952\)](#): *Uma regra de votação com duas alternativas satisfaz os critérios de anonimato, neutralidade, responsividade positiva e decisividade se, e somente se, for a regra de maioria simples.*

Recapitulando: anonimato requer que a preferência social seja invariante às permutações nas preferências individuais (cada eleitor, um voto); neutralidade requer que as alternativas de escolhas sejam invariantes às permutações, ou seja, não deve haver privilégios de uma em relação a outra; responsividade positiva nos informa que, se alguém modificou sua preferência para x em detrimento de y e se todos permaneceram constates, a alternativa x deve ter sua posição positivamente afetada; decisividade é a capacidade de, independentemente das escolhas individuais, a regra fornecer um resultado.

Perceba que a definição de decisividade é similar à ideia de domínio irrestrito (condição U) de Arrow. Além disso, [Sen \(1970\)](#) demonstrou os seguintes resultados:

1. Lema 5*b: Para qualquer regra de escolha coletiva, neutralidade (N) implica independência das alternativas irrelevantes (condição I).
2. Lema 5*c: Uma regra de escolha social para ser anônima (A) deve não ser ditatorial (condição D).
3. Lema 5*d: Uma regra de escolha social que seja neutra (N) e responsiva positivamente (S) satisfaz o princípio fraco de Pareto (condição P).

Dessa forma, pode-se reescrever o teorema de Arrow utilizando os mesmos axiomas do teorema de May, demonstrando que não existem formas de generalização do teorema de May para mais do que duas alternativas:

Teorema: *Com mais de duas alternativas de escolha, não existe regra de escolha social que satisfaça anonimato (A), neutralidade (N), responsividade positiva (S) e decisividade (U).*

4.1.6 Possíveis "rotas de fuga" da Impossibilidade de Arrow

O teorema de Arrow parte de quatro axiomas normativos básicos, simples e intuitivo, que torna difícil se afastar da impossibilidade. Para se afastar, deve-se enfraquecer algum axioma, o que implica avaliar o que se perde com isso. Por exemplo, das quatro condições, não se ter um ditador (condição N-D), acredita-se ser uma ideia generalizada de bom comportamento de uma regra democrática. Neste sentido, se tivermos que deixar de lado algum axioma, este não será.

Respeitar a unanimidade (condição P) parece ser, também, uma ideia razoável. Uma regra de escolha social que não respeite as preferências reveladas dos indivíduos, não ser responsiva às suas escolhas, não seria uma boa regra.

Os dois axiomas restantes parecem fornecer as possibilidades de se ter uma "rota de fuga". O que significa flexibilizar o axioma de domínio irrestrito (condição U) tornando-o, restrito? O que significa flexibilizar a ideia de independência das alternativas irrelevantes (condição I)?

Além desses axiomas, mais prováveis de serem flexibilizados, o teorema de Arrow pressupõe que a escolha social deva respeitar o critério de racionalidade, que está implícito na noção de se ter uma relação de preferência social baseada na relação de preferência individual. Em suma, espera-se que o indivíduo seja racional (preferências completas, transitivas, etc.) e que a escolha social também seja. Neste sentido, é possível falar em

racionalidade social? Racionalidade não é um critério intrínseco ao indivíduo? Seria possível flexibilizar essa racionalidade?

Restringindo a Racionalidade: Transitividade

Como podemos refletir sobre o critério de racionalidade baseando-se no conceito de transitividade? Suponha que uma pessoa qualquer tenha preferências não-transitivas. Dessa forma, como ele prefere x à y e prefere y à z , então prefere z à x . Formalmente:

$$x \succ y \succ z \Rightarrow z \succ x$$

Considere que essa pessoa já esteja de posse da alternativa z e esteja circulando por uma feira disposta a trocar esse bem e pagar uma certa quantia de dinheiro (\$1) para ter acesso à alternativa que mais lhe agrada. Logo na primeira barraca, ele encontra todas as três alternativas sendo vendida. Eis que ele resolve trocar z por y , pagando \$1, pois $y \succeq z$. Na sequência, ele percebe que pode trocar y por x pagando outro \$1, pois $x \succeq y$; de posse de x ele percebe que z é melhor, então paga novamente \$1 e tem z em mãos, mais uma vez. O vendedor, esperto, percebeu que tem algo de estranho nas preferências do pobre rapaz e resolve ofertar, novamente, a opção y ... Ora, em algum momento a pessoa perceberá que tem algo de estranho na sua própria preferência e que este comportamento está deixando-o pobre¹. Preferências intransitivas demonstram inconsistências e, em certo sentido, irracionalidades. Assim, um dos fundamentos da escolha individual é partir de escolhas transitivas.

Sen (1970) caracterizou toda uma gama de consistências nas escolhas para além da transitividade. As preferências podem ter a propriedade da transitividade, quase-transitividade, preferências acíclicas e tripla-acíclicas. As três últimas seriam versões fracas para a transitividade, ou seja, transitividade implica em quase-transitividade, que por sua vez implica na aciclicidade, que implica na tripla-aciclicidade. Entretanto, o contrário não vale. Recapitulando o Lema 1*a de Sen (1970, p.10):

Se uma pessoa prefere x a y e prefere y a z , então deve preferir x a z .

1. Se uma pessoa prefere x a y e é indiferente entre y a z , então deve preferir x a z .
2. Se uma pessoa é indiferente entre x a y e prefere y a z , então deve preferir x a z .
3. Se uma pessoa é indiferente entre x a y e é indiferente entre y a z , então deve ser indiferente entre x a z .

¹ Este é um exemplo clássico que ficou conhecido *money pump* (TVERSKY, 1969, p.45).

Denomine a condição (1) como transitividade Prefere-Prefere (PP), condição (2) de transitividade Prefere-Indiferente (PI), condição (3) de transitividade Indiferente-Prefere (IP) e condição (4) de transitividade Indiferente-Indiferente (II). Perceba que todas essas relações de preferências podem ser reescritas como:

$$xRy \Rightarrow xPy \text{ ou } xIy$$

Logo,

$$xR_iy \text{ e } yR_iz \Rightarrow xR_iz$$

O conceito de quase-transitividade é quando só vale a condição (1) acima, ou seja, não permite-se a existência de indiferença entre as alternativas. Assim:

$$xP_iy \text{ e } yP_iz \Rightarrow xP_iz$$

Por sua vez, vimos que um dos problemas da transitividade é a possibilidade de ciclos indecisórios, ou seja, uma situação em que o conjunto de escolha é vazio. Por exemplo:

$$xP_iy \text{ e } yP_iz \Rightarrow zP_ix$$

Logo, se não quisermos ciclos, e tivermos três alternativas de escolha, a preferência tem que ser tripla-acíclica:

4. Se uma pessoa prefere x a y e prefere y a z , então não deve preferir z a x .

Por sua vez, podemos generalizar e ter o conceito de preferências acíclicas:

5. Se uma pessoa prefere x_1 a x_2 , a x_3 , ..., x_{k-1} a x_k então ela não prefere x_k a x_1 .

O teorema de Arrow é fortemente baseado na necessidade de transitividade e, com essa pressuposição, obtem-se, em conjunto com os outros axiomas, um resultado ditatorial ou um não-resultado.

[Buchanan \(1954\)](#) criticou a elaboração de [Arrow \(1951\)](#) afirmando que não via sentido em desenvolver uma ideia de racionalidade social, pois a razão, enquanto atributo do comportamento humano, é intrínseco ao indivíduo. Logo, transferir uma propriedade do indivíduo à uma suposta propriedade coletiva seria ilegítimo. Segundo ele:

It is difficult to know exactly what is meant by "rational social choice" in the Arrow analysis. [...] The mere introduction of the idea of social rationality suggests the fundamental philosophical issues involved. Rationality or irrationality as an attribute of the social group implies the imputation to that group of an organic existence apart from that of its individual components. [...] We may adopt the philosophical bases of individualism in which the individual is the only entity possessing ends or values. In this case no question of social or collective rationality may be raised. A social value scale as such simply does not exist (BUCHANAN, 1954, p.116).

Seria possível, então, não ter esse critério de racionalidade tão rígido e, assim, sair da impossibilidade Arrow? O que ocorre se ao invés de termos transitividade, adotarmos a quase-transitividade, flexibilizando a ideia de racionalidade? Infelizmente nada animador: pressupondo todos os axiomas de Arrow mais a quasi-transitividade no lugar da transitividade, obtem-se uma oligarquia, um grupo com poderes de impor a sua preferência aos demais. Assim, denomine um grupo de pessoas pertencente ao conjunto G ; se os membros desse conjunto preferir x a y então a escolha social será x a y . Se esse conjunto G tiver apenas um membro, tem-se um ditador; dois membros, duumvirate; três, triumvirate e assim sucessivamente. No limite, tem-se o que Sen (1970) denominou de extensão do critério de Pareto onde todos os membros desse conjunto G terá exatamente os mesmos membros de toda sociedade. Logo, teríamos uma unanimidade.

Teorema de Gibbard (1973)²: *Uma função de escolha social que satisfaça os critérios de quasi-transitividade, domínio irrestrito (U), independência das alternativas irrelevantes (I) e critério fraco de Pareto (P) deve ser uma oligarquia.*

Entretanto, Mas-Colell e Sonnenschein (1972) demonstraram que se adotarmos essas mesmas ideias, conjuntamente com o critério de responsividade positiva, volta-se ao ditador.

Teorema de Mas-Colell e Sonnenschein (1972): *Uma função de escolha social, com pelo menos três pessoas, que satisfaça os critérios de quasi-transitividade, domínio irrestrito (U), independência das alternativas irrelevantes (I), critério fraco de Pareto (P) e responsividade positiva (S) deve ser um ditador.*

Eles demonstraram ainda que, se tivermos mais do que quatro pessoas, alguém terá poder de veto.

Teorema de Mas-Colell e Sonnenschein (1972): *Uma função de escolha social, com pelo menos quatro pessoas, que satisfaça os critérios de quasi-transitividade, domínio*

² Uma primeira versão apareceu em 1969.

irrestrito (U), independência das alternativas irrelevantes (I), critério fraco de Pareto (P) e responsividade positiva (S) implica em alguém com poder de veto.

Existe uma forma de flexibilizar a ideia de responsividade positiva se adotarmos a ideia de monotonicidade não-negativa. Lembre-se que pode-se chamar monotonicidade de responsividade e que positividade significava que se uma pessoa trocasse sua escolha em prol de outra alternativa; essa nova alternativa tinha que ser beneficiada; não negatividade, assim, implica em, pelo menos, não ser prejudicada. Com isso, tem-se um novo teorema:

Teorema de Blau e Deb (1977): *Uma função de escolha social, com o mesmo número de pessoas e alternativas, que satisfaça os critérios de quasi-transitividade, domínio irrestrito (U), independência das alternativas irrelevantes (I), neutralidade (N) e monotonicidade não-negativa implica em alguém com poder de veto.*

Por sua vez, se adotarmos a ideia de preferências acíclicas ao invés de se ter um ditador ou uma oligarquia tem-se um alguém com poder de veto que, mesmo que não determine quem será escolhido, pode impor quem não será escolhido. Brown (1975) demonstrou ainda que, com aciclicidade, tem-se um *collegial polity* com uma elite com capacidade de induzir o resultado.

Teorema de Blair e Pollak (1982): *Uma função de escolha social que satisfaça os critérios de preferências acíclicas, domínio irrestrito (U), independência das alternativas irrelevantes (I), Pareto fraco (P) implica em alguém com poder de veto.*

O que esses resultados demonstraram é que, flexibilizando a ideia de racionalidade, não se tem uma saída satisfatória para o problema de Arrow. O requerimento de consistência nas escolhas, desde a versão mais forte (transitividade) à versão mais fraca (aciclicidade) revelou que a ideia de se ter uma imposição social a partir de escolhas individuais é a norma e não exceção. Dessa forma, deve-se buscar novas rotas de fuga para a impossibilidade de Arrow.

Restringindo Domínio da Função (condição U)

A condição de domínio irrestrito, como vimos, implica em aceitar que todos os indivíduos ordene sua preferências livremente. Com isso, sem imposição na ordem de preferência, a função de escolha social (ou a regra de votação) deve ser capaz de fornecer um resultado. Argumentamos que, com essa pressuposição e, aceitando os outros axiomas de Arrow, de fato, não existe tal função de escolha social (ou regra de votação). Como, então, flexibilizar o domínio e torná-lo restrito? Para desenvolver o argumento, vamos analisar, novamente, o paradoxo de Condorcet. O problema desse paradoxo é que, deixando as pessoas livres para escolherem suas preferências, o resultado social pode ser uma

impossibilidade decisória, ou seja, um conjunto de escolha vazio. Considere três pessoas com as seguintes preferências:

	Pessoa 1	Pessoa 2	Pessoa 3
1ª opção	x	y	z
2ª opção	y	z	x
3ª opção	z	x	y

Tabela 93 – Paradoxo de Condorcet

Reescrevendo em termos formais:

$$xP_1y \text{ e } yP_1z \Rightarrow xP_1z$$

Significa que a pessoa indexada pelo número 1, prefere a alternativa x a y e prefere y a z. Logo, por transitividade, prefere x a z. Seguindo o mesmo raciocínio para as outras duas pessoas, tem-se que:

$$yP_2z \text{ e } zP_2x \Rightarrow yP_2x$$

$$zP_3x \text{ e } xP_3y \Rightarrow zP_3y$$

Logo, fazendo a escolha por maioria simples teremos:

	Total de votos	Vencedor
x contra y	2	x
y contra z	2	y
z contra x	2	z

Tabela 94 – Resultado do Paradoxo de Condorcet

Ora, o que este resultado nos informa é que:

$$xPy \text{ e } yPz \Rightarrow zPx$$

Assim, rompe-se a transitividade pois, logicamente, a alternativa x deveria ser escolhida à alternativa z. Tecnicamente, o que se mostrou com esse exemplo é que, de cada conjunto de escolha contendo duas alternativas, efetiva-se uma decisão. Entretanto, com três alternativas não se tem uma decisão pela quebra da transitividade. Quando o conjunto de escolha envolvia as alternativas (x,y), escolheu-se x; quando o conjunto de escolha envolvia (y,z), escolheu-se y; por sua vez, quando o conjunto de escolha envolvia (x,z),

escolheu-se z . Agora, quando o conjunto de escolha envolve as três alternativas (x,y,z) , não se tem uma decisão. Formalmente tem-se que:

$$C(x, y) = (x)$$

$$C(y, z) = (y)$$

$$C(z, x) = (z)$$

$$C(x, y, z) = \emptyset$$

Por que desse resultado? Qual a intuição por trás disso? *Perceba que esse resultado é consequência lógica de não se ter um consenso mínimo entre os indivíduos sobre o ranking das alternativas.* Cada indivíduo coloca uma alternativa distinta dos outros em primeiro lugar no ranking. A pessoa 1 ordena a opção x em primeiro; a pessoa 2 ordena y e a pessoa 3 ordena z . Logo, não há consenso sobre qual é a melhor alternativa. Observe que o mesmo raciocínio ocorre com a opção colocada em segundo lugar no ranking: sem consenso sobre qual alternativa é a segunda colocada. O mesmo vale para a terceira, e última, alternativa: cada pessoa escolheu uma diferente como a pior. *Logo, não há um mínimo de concordância e, fundamentalmente, o paradoxo é resultante desse problema de coordenação.* Pode-se representar tais resultados como na figura 3:

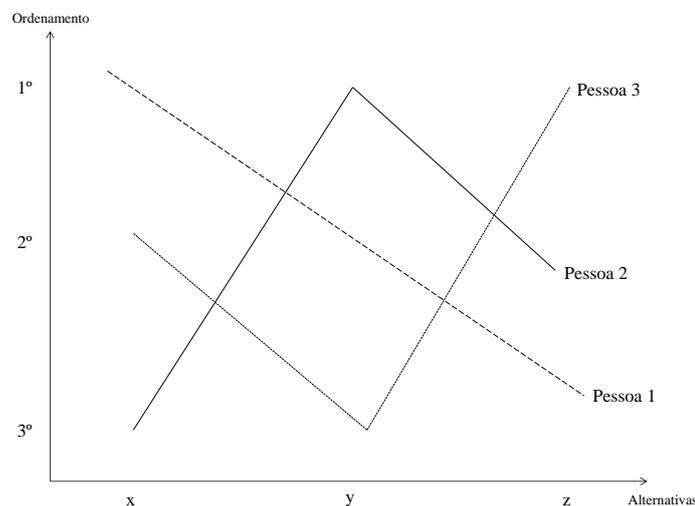


Figura 3 – Ordenação das Preferências - I

O gráfico apresenta no eixo das abscissas as alternativas disponíveis e no eixo das coordenadas a escala de ordenação de cada preferência. A leitura do gráfico deve ser feita da seguinte forma (segundo a tabela com os perfis das pessoas): a pessoa 1 tem o seguinte ordenamento: xP_1yP_1z . Logo, a linha representando essa pessoa, tal como desenhada, será uma reta decrescente partindo de sua alternativa na primeira posição à

alternativa z na terceira posição; a preferência da pessoa 2 será representada como um formato de "v invertido", pois tem a alternativa que está no meio (y) como a melhor; por sua vez, a preferência da pessoa 3 tem um formato de "v normal", pois a primeira opção é a alternativa z depois a alternativa x e enfim, a alternativa y. Perceba que não se deve ligar os pontos e analisar tal qual estamos acostumados: deve-se apenas representar as preferências de uma forma lógica.

Este tipo de gráfico é muito útil para avaliarmos qual o impacto de não se ter consensos nas definições sobre escolhas sociais. Analisando a tabela com os perfis, observa-se que, como não há consenso, ocorre uma característica especial nas preferências, pois cada alternativa aparece uma única vez em cada linha (ou coluna) da tabela. A literatura denomina esse tipo de preferência de "quadrado latino" (*latin square preferences*) e o reflexo desse comportamento no gráfico é a existência de pelo menos uma preferência com "dois picos": a reta desce e sobe. Perceba que essa característica não é modificada se invertermos a ordem da apresentação das preferências no eixo das abscissa, tal como segue:

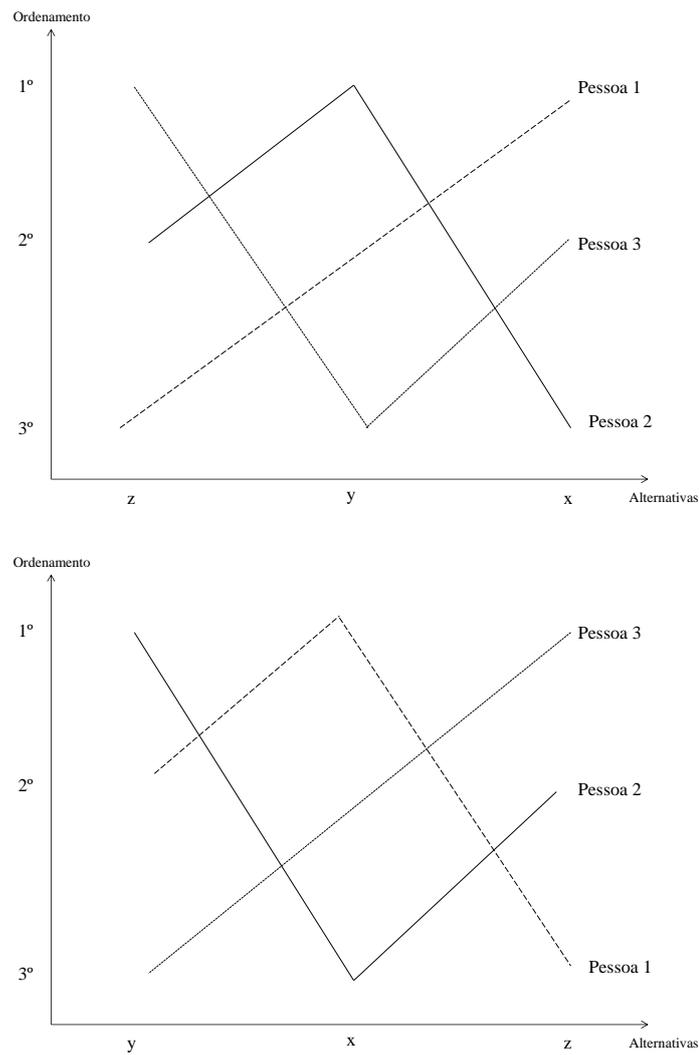


Figura 4 – Ordenação das Preferências - II

Black (1958) e Arrow (1951) demonstraram que, modificando essa estrutura de preferência (restringindo o domínio da função), pode-se impedir a ocorrência de tais paradoxos e, como consequência, a ocorrência de impossibilidades. Uma forma funcional especial é ter preferências de pico-único (*single-peaked preferences*). Observe que nos exemplos acima, existem preferências com dois picos (a reta que representa a preferência desce e depois sobe, representado dois picos). Ter preferências de pico-único implica em "impedir" que isso ocorra, ou seja, ou a reta que representa preferência só sobe, ou só desce ou desce a partir do centro para ambos os lados (formato de v invertido). Observe o seguinte exemplo com três preferências de pico-único:

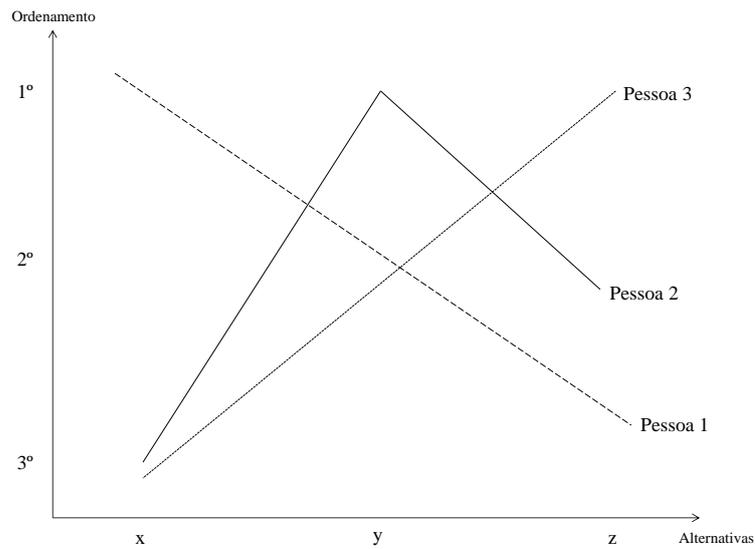


Figura 5 – Ordenação das Preferências - III

Logo, o que podemos perceber? Houve uma modificação no ordenamento da pessoa 3 de tal forma que ela trocou a ordem entre as alternativas x e y. Com isso temos um novo perfil de ordenamento, representado por uma nova tabela:

	Pessoa 1	Pessoa 2	Pessoa 3
1ª opção	x	y	z
2ª opção	y	z	y
3ª opção	z	x	x

Reescrevendo em termos formais:

$$\begin{aligned}
 xP_1y \text{ e } yP_1z &\Rightarrow xP_1z \\
 yP_2z \text{ e } zP_2x &\Rightarrow yP_2x \\
 zP_3y \text{ e } yP_3x &\Rightarrow zP_3x
 \end{aligned}$$

Logo, fazendo escolha por maioria simples teremos:

Total de votos	Vencedor	Vencedor
x contra y	2	y
y contra z	2	y
z contra x	2	z

Assim, a alternativa y vence as duas alternativas rivais (x,z): yPx e yPz

Dessa forma, como a alternativa y venceu as duas alternativas rivais numa comparação aos pares, esta alternativa é dita vencedor de Condorcet. Formalmente, agora, tem-se uma escolha entre as três alternativas:

$$\begin{aligned} C(x, y) &= (y) \\ C(y, z) &= (y) \\ C(z, x) &= (z) \\ C(x, y, z) &= (y) \end{aligned}$$

O que este resultado sugere é que numa votação por maioria simples sempre existirá solução. Tem-se o seguinte teorema:

Teorema de Black (1948): *Com preferência de pico-único o resultado da regra de maioria simples será a escolha social, mesmo com mais de 2 alternativas de escolha.*

Uma versão alternativa:

Teorema: *Com número ímpar de eleitores, todos com preferências de pico-único, sempre existirá um vencedor de Condorcet.*

Existem outras formas de se apresentar modificações na estrutura de preferências apresentando resultados similares, tais como as ideias de *single-peakedness* (INADA, 1969), *separability into two groups* (INADA, 1969) e *latin-squarelessness* (WARD, 1965).

Um segundo aspecto relevante das preferências de pico-único é que ocorre um consenso mínimo entre os indivíduos. Como assim? Perceba pelo exemplo anterior que o consenso surge na medida que ninguém coloca a alternativa y na última posição. Sen (1966) apresentou uma generalização que engloba todas essas opções, denominada por ele de *tripewise value-restriction*. Assim, ocorrerá resultado positivo com a regra de maioria simples se existir concordância (consenso mínimo) de que, pelo menos, uma alternativa não seja a melhor; ou que exista concordância de que pelo menos uma não seja a pior ou, ainda, que não seja mediana. Além disso, Sen e Pattanaik (1969) demonstraram outra generalização com ênfase em distintos acordos *value-restriction*, *limited agreement* e *extremal restriction*.

Teorema de Sen (1966): *O resultado da regra de maioria simples será a escolha social se satisfizer os axiomas de Arrow (condições U , I , P e D) e as preferências forem tripewise value-restriction.*

Um terceiro aspecto sobre essas restrições no domínio da função escolha é que a alternativa mediana na escala de ordenamento sempre vencerá quando se tiver esse tipo de preferência. Esse resultado foi demonstrado por [Black \(1948\)](#) e [Downs \(1957\)](#):

Teorema Eleitor Mediano: *Se as preferências forem de pico-único e existir pelo menos dois indivíduos competindo, o resultado será convergência ao valor mediano.*

Como se pôde observar nesta seção, a restrição do domínio da função possibilita escapar dos resultados paradoxais e de impossibilidade. Do ponto de vista da teoria política normativa, estes resultados abrem possibilidades analíticas interessantes. Como garantir que se tenha consensos mínimos? Uma clara possibilidade é um diálogo entre a escolha social e a ideia de deliberação no processo de modificação das estruturas de preferências. Dessa forma, a ideia de que modificações nas preferências seriam incompatíveis com essa literatura se mostra um equívoco.

Restringindo a Independência das Alternativas Irrelevantes (Condição I)

[Arrow \(1951\)](#) demonstrou que não existe possibilidade de se ter uma função de escolha social respeitando seus axiomas básicos. Entretanto, se desconsiderarmos a condição de independência das alternativas irrelevantes (condição I) abre-se a possibilidade do surgimento de várias regras de votação que satisfaça os outros requerimentos.

De todos os pressupostos do teorema de Arrow, esta condição, sem dúvidas, é a que tem maior controvérsia. Como tal, é a que, em geral, recorre-se para resolver os problemas colocados por este. Do ponto de vista axiomático, essa condição impõe que dada duas alternativas disponíveis para escolha individual, a escolha social deve ser feita exclusivamente em torno do ordenamento da relação de preferência entre essas duas alternativas. Dessa forma, a escolha não deve ter interferência de outras alternativas, pois são irrelevantes.

Para além da questão técnica da aplicabilidade dessa condição no teorema de Arrow, tem-se uma importante discussão filosófica. Como as preferências são ordinais, não há espaço para comparabilidade entre as pessoas, pois "*interpersonal comparison of utilities has no meaning and, in fact, that there is no meaning relevant to welfare comparisons in the measurability of individual utility*" ([ARROW, 1951](#), p.9). A possibilidade de se realizar comparações interpessoais (com ou sem medida cardinal) implica em ampliar a base informacional, pois não restringe a escolha (e a análise) apenas às comparações binárias. Neste aspecto, esta condição poderia ser chamada de *pairwise comparison condition* ([SEN, 1970](#)). Assim, abre-se o leque para análises normativas, morais e éticas - em termos axiomáticos - tal como o *princípio da diferença* de [Rawls \(1971\)](#), com sua visão *welferista*, bem como análises utilitaristas baseadas em [Bentham \(1798\)](#) e [Harsanyi \(1955\)](#).

Sen (1970) desenvolveu estes argumentos mostrando quais dificuldades emergem dessa possibilidade:

Indeed, there are individuals who tend to be extremists and find things either "magnificent" or "horrible," while others finely differentiate between such things as "excellent, good, mediocre, poor" and "awful." It seems manifestly unfair to make the ethical assumption that the welfare significance of moving the first individual from what he regards as "horrible" to what he finds as "magnificent" is no more than moving the second individual from what he finds "poor" and what strikes him as "mediocre." What is particularly objectionable about this particular mechanism is not that it violates condition I, which of course it does, but that it implies an ethical assumption that will appear to be arbitrary and objectionable (SEN, 1970, p.94).

Como um dos argumentos de Sen (1970) é o aumento da base informacional, e este critério de independência restringe as informações, levar em consideração as outras alternativas disponíveis, bem como outras formas de valoração das preferências, que não estejam exclusivamente centradas nas utilidades, tornam-se possibilidades reais de contornar os problemas da impossibilidade. Mas o que significa isso? Vimos no capítulo 3 que a regra de votação de Borda violava, justamente, este critério de independência das alternativas irrelevantes, pois a possibilidade de pontuar alternativas distintas implicava na consideração de mais do que duas alternativas. Flexibilizando essa regra, então, amplia-se a base informacional, pois pode-se considerar toda uma escala de intensidade de preferência das pessoas.

Segundo Saari (2001), o problema da impossibilidade de Arrow se impõe, justamente, na perda de informações relevantes, decorrente do descarte de informações que não estejam na comparação ordenada aos pares e, isto é fruto do critério de independência das alternativas irrelevantes. Dessa forma, flexibilizar este critério seria um caminho razoável de saída dos dilemas.

Um importante argumento a favor desse critério é com relação ao custo informacional. Fazer ranking entre duas alternativas quaisquer (x,y) demanda energia e recursos no processo de construção da ordenação das preferências. A partir do momento que viola-se o critério de Independência, ampliando-se a base informacional, aumenta os custos informacionais pois, agora, ao invés de ordenar duas alternativas têm-se que ordenar todas as alternativas disponíveis (no limite, infinitas). Dessa forma, o que o critério de Independência tem de parcimonioso, sua violação nos leva ao seu oposto! Para Campbell e Kelly (2006):

Imagine trying to even determine the set of all logically possible candidates for Congress in just one district. Imagine trying to get voters to meaningfully assign Borda counts to each such candidate. Imagine the transmission and processing problems"(CAMPBELL; KELLY, 2006).

Para além desses problemas informacionais, caso se aceite a ideia de adotar um método que possibilite avaliar todas as alternativas sem perder informações relevantes, Young (1975) demonstrou que:

Teorema de Young (1975): *Uma função de escolha social é anônima, neutra e consistente se, e somente se, for um função de escolha social que utiliza pontos (scoring) ordenados por posição.*

Com esse resultado, Saari (2000) demonstrou que de todos os métodos posicionais (que leva em consideração a intensidade da escolha) o método de contagem de Borda é o mais eficiente. Para Saari (2009):

What provides hope from these dictionaries is that the Borda Count is the unique rule (when used with every subset of candidates) that significantly minimizes the number and kinds of allowed paradoxes. Thus the Borda Count enjoys the maximum number of positive properties; e.g., only Borda always ranks a Condorcet-winner over a Condorcet loser (SAARI, 2009 apud (BALINSKI; LARAKI, 2011)).

Entretanto, o calcanhar de Aquiles de todos os métodos posicionais em geral, e do método de Borda em particular, é a possibilidade de manipulação estratégica das preferências. Quando tínhamos apenas duas alternativa, a ideia de independência das alternativas irrelevantes, excluía a possibilidade de manipulação. Agora, violando este critério, o voto estratégico e a falsa representação das preferências torna possível manipulação eleitoral. Considere o mesmo exemplo do capítulo 3, com três pessoas (A, B, C) e três alternativas de escolha (x,y,z):

	A	B	C
1ª opção	x	z	z
2ª opção	y	x	x
3ª opção	z	y	y

Para cada alternativa vamos designar pontos da seguinte forma: 2 pontos para alternativa na primeira posição, 1 ponto para segunda e 0 para a terceira. Assim:

	1 ^a	2 ^a	3 ^a	Total
x	2	2	0	4
y	0	1	0	1
z	4	0	0	4

Observa-se um empate entre as alternativas x e z (com 4 pontos). Além disso, tem-se que a disputa relevante é entre x e z. Logo, o resultado depende exclusivamente da ordem de preferência entre essas duas alternativas. Perceba o que acontece quando modificamos a relação entre x e y sem alterar a ordem de preferência dos eleitores em relação às alternativas x e z.

	A	B	C
1^a opção	x	z	z
2^a opção	y	y	x
3^a opção	z	x	y

Todos continuam com as suas preferências entre as alternativas relevantes (x,z) ordenadas de acordo com suas escalas valorativas. Agora, a pessoa B resolveu elevar a alternativa y para sua segunda melhor opção, mantendo a opção z melhor que x, tal como antes. O resultado será:

	1 ^a	2 ^a	3 ^a	Total
x	2	1	0	3
y	0	2	0	2
z	4	0	0	4

A alternativa vencedora (Borda winner) passa a ser z. Ora, a pessoa B tinha justamente essa alternativa como a preferida. Então, ele manipulou sua real preferência trocando a posição entre x e y e, assim, venceu, justamente, a sua primeira opção! Logo, ocorreu manipulação, também entendendo como comportamento estratégico entre os eleitores. Dessa forma, se quisermos flexibilizar a condição de independência das alternativas irrelevantes, temos que aceitar a possibilidade de existência de comportamento estratégico.

Cabe uma importante observação, Arrow quando apresentou seus resultados pela primeira vez, deixou explícito que esse tipo de comportamento estratégico não seria considerado na análise. Isso não implica que Arrow tenha considerado por completo este aspecto. Ele afirma:

It has been stated above that the present study confines itself to the formal aspects of collective social choice. The aspects not discussed may be conveniently described as the game aspects. [...] The other meaning of the term "game" is that which has been brought to the attention of economists by Professors von Neumann and Morgenstern.

The point here, broadly speaking, is that, once a machinery for making social choices from individual tastes is established, individuals will find it profitable, from a rational point of view, to misrepresent their tastes by their actions, either because such misrepresentation is somehow directly profitable or, more usually, because some other individual will be made so much better off by the first individual's misrepresentation that he could compensate the first individual in such a way that both are better off than if everyone really acted in direct accordance with his tastes. Thus, in an electoral system based on plurality voting, it is notorious that an individual who really favors a minor party candidate will frequently vote for the less undesirable of the major party candidates rather than "throw away his vote." Even in a case where it is possible to construct a procedure showing how to aggregate individual tastes into a consistent social preference pattern, there still remains the problem of devising rules of the game so that individuals will actually express their true tastes even when they are acting rationally. This problem is allied to the problem of constructing games of fair division, in which the rules are to be such that each individual, by playing rationally, will succeed in getting a preassigned fair share; in the case of two people and equal division, the game is the very familiar one in which one player divides the total stock of goods into two parts, and the second player chooses which part he likes (ARROW, 1952, p.21-22).

Além disso, como vimos no capítulo 3, Dodgson (1876) afirmou: "*This principle of voting makes an election more of a game of skill than a real test of the wishes of the electors*". A compreensão completa do impacto da teoria dos jogos sobre a teoria da escolha social como formulação de comportamento estratégico dos agentes só surgiria anos depois. Na próxima seção apresenta-se estes resultados e como manipulação estratégica é vital para análise.

4.2 Condições Normativas do Teorema Gibbard-Satterthwaite

Farquharson (1969) começa seu livro citando a carta de Plínio, o Jovem, que retrata uma votação com manipulação. O que a literatura reconhece como sendo o teorema de Gibbard-Satterthwaite, na verdade, são dois resultados distintos mas complementares: Gibbard (1973) e Satterthwaite (1975) que, independentemente, demonstraram que não há a possibilidade de se ter uma regra de votação que possa ser à prova de manipulação. Na seção anterior apresentou-se a ideia de uma manipulação das preferências (comportamento estratégico) através de um exemplo específico de regra de votação que é o método de contagem de pontos de Borda. O que os teoremas de Gibbard-Satterthwaite buscaram mostrar é que este resultado é generalizado para qualquer regra de votação.

No trabalho de Gibbard (1973) apresenta-se o resultado através da teoria dos jogos e comportamento estratégico. O autor diz, textualmente que:

I shall prove in this paper that any non-dictatorial voting scheme with at least three possible outcomes is subject to individual manipulation. By a "voting scheme," I mean any scheme which makes a community's choice depend entirely on individuals' professed preferences among the alternatives. An individual "manipulates" the voting scheme if, by misrepresenting his preferences, he secures an outcome he prefers to the "honest" outcome—the choice the community would make if he expressed his true preferences (GIBBARD, 1973, p.587).

Dessa forma, ele vai caracterizar um *straightforward game*, ou seja, um perfil da verdadeira preferência de um jogador i qualquer e que seja uma estratégia dominante. Além disso, precisa definir o que ele entende por manipulação, ou seja, ser *strategy-proof*.

Definição: *um método é dito à prova de estratégia se faz do voto estratégico uma impossibilidade.*

Com isso ele demonstra que:

Teorema de Gibbard (1973): *Todo straightforward game com mais do que duas alternativas é ditatorial.*

De posse desse resultado, ele observou que:

Corolário: *Todo esquema de votação com pelo menos três alternativas ou é um ditador ou é manipulável.*

Já no artigo de Satterthwaite (1975)³ o autor demonstrou três resultados correlatos: (i) todo procedimento de votação à prova de comportamento estratégico é ditatorial; (ii) todas as condições dos procedimentos de votação que são à prova de estratégia correspondem às mesmas condições do teorema de Arrow; (iii) o teorema da impossibilidade de Arrow é demonstrado através do procedimento à prova de estratégia. Nas palavras do autor:

The fundamental question I ask in this paper is if a committee can eliminate use of sophisticated strategies among its members by constructing a voting procedure that is "strategy-proof" in the sense that under it no committee member will ever have an

³ Artigo derivado da tese de doutorado "The Existence of a Strategy Proof Voting Procedure: A Topic in Social Choice Theory" de 1973.

incentive to use a sophisticated strategy. I prove a negative answer: If a committee is choosing among at least three alternatives, then every strategy-proof voting procedure vests in one committee member absolute power over the committee's choice. In other words, every strategy-proof voting procedure is dictatorial (SATTERTHWAITE, 1975, p.188).

Com isso, foi demonstrado que:

Teorema 1 (Gibbard-Satterthwaite): *Todo procedimento de votação com mais do que três alternativas será eficiente no sentido de Pareto e à prova de estratégia de manipulação se, e somente se, for um ditador.*

Teorema 2 Satterthwaite (1975): *Existe uma correspondência um-a-um entre as condições do teorema de Arrow e os procedimentos de votação à prova de comportamento estratégico.*

Para Satterthwaite (1975):

Arrow's conditions is equivalent to constructing a strategy-proof voting procedure, Theorem 2 creates a strong new justification for Arrow's choice of rationality, CS, NNR, and IIA as conditions which an ideal social welfare function should satisfy, The conditions of rationality and independence of irrelevant alternatives [IIA] which have caused so much controversy are now shown to be part and parcel of the very practical criterion of strategy-proofness. For instance, this theorem shows that rationality is more than an attractive intellectual criterion. If a social welfare function violates rationality, then the voting procedure derived from it violates strategy-proofness (SATTERTHWAITE, 1975, p.207).

Em suma, se for um procedimento de votação não-manipulado, então é um ditador; se não for ditador, é manipulado. Jean-Charles de Borda, quando questionado sobre os problemas de manipulação com seu método de votação, alegou: "*my scheme is only intended for honest men!*" (BLACK, 1958, p.182). O teorema de Gibbard-Satterthwaite talvez pudesse deixar Borda aliviado: todos os procedimentos de votação padecem do mesmo problema!

Uma possibilidade de se encontrar uma regra de votação à prova de manipulação é restringir o domínio da função, tal como vimos em Arrow, ou seja, a existência de preferências de pico-único elimina a possibilidade de manipulação. Moulin (1980) demonstrou que nesses casos, elimina-se tal possibilidade:

Teorema de Moulin (1980): *Com preferências de pico-único, pode-se generalizar a ideia do eleitor mediano e a regra de votação será anônima, eficiente e strategy-proof.*

Será que em uma votação basta um eleitor com preferência de pico-único para chegar neste mesmo resultado? Zeckhauser (1973) conjecturou que sim. Entretanto, Pattanaik (1976) demonstrou que não: todos tem que ter preferência de pico-único.

Esses resultados de impossibilidades de se ter regras de escolhas sociais que não sejam manipuladas, envolvem, em certa medida, diálogo com outra área de pesquisa dentro da ciência econômica, denominada de desenho de mecanismo. A ideia é desenvolver mecanismos que possibilitem às pessoas revelarem, de fato, suas reais preferências privadas, oferecendo incentivos corretos para tanto⁴.

Por outro lado, para além da manipulação e comportamento estratégico, mesmo quando uma regra de escolha social funcione (por exemplo, através de eleição por maioria simples) ainda assim pode-se ter resultados indesejados. Uma dada maioria pode impor um resultado que viole, flagrantemente, alguns direitos das minorias. Como resolver essa questão sobre direitos individuais e escolha social?

4.3 Condições Normativas do Teorema de Sen

No desenvolvimento formal do modelo de Arrow vimos como resultado uma impossibilidade de simultaneamente satisfazer os seus axiomas básicos. Como consequência desse teorema, observamos que sempre existe a possibilidade da escolha social ser representada pela preferência de uma única pessoa: um ditador. Evidente que tal solução, do ponto de vista democrático, não será aceita como razoável, pois esse indivíduo será decisivo com relação a qualquer alternativa disponível. Tecnicamente, um ditador i pode ser assim caracterizado: diante da escolha entre (x, y) se o ditador prefere x à y , então a escolha social será x ; se a escolha do ditador for y , a escolha social também será y . Observe, então, que o ditador tem o poder de ser decisivo, poder de determinar o resultado do processo de escolha social:

$$\begin{aligned} xP_i y &\Rightarrow xPy \\ yP_i x &\Rightarrow yPx \end{aligned}$$

Este resultado implica dizer que o ditador determina (impõe) sua vontade sobre às

⁴ Está fora do escopo deste trabalho desenvolver o argumento por trás desta ideia. Entretanto, este ramo de pesquisa vem se demonstrando frutífero e com ótimos resultados, sendo reconhecido por Prêmio Nobel de Economia em 2007: Leonid Hurwicz, Eric Maskin e Roger Myerson.

liberdades individuais. Mas o que seria liberdade individual? Para Sen (1970), liberdade individual é o respeito à esfera de decisão privada, que, num sentido de Mill (1861) ou Hayek (1960), significa que "há um limite para a interferência legítima da opinião coletiva na independência individual". Dessa forma, em certa medida, respeito à liberdade individual implica em ser "decisivo localmente", dentro de seu próprio círculo de direitos individuais básicos. Logo, cada indivíduo tem o direito de ser ditador dele mesmo, ter liberdade de escolha e impor a sua vontade de escolha para ele mesmo e, se possível, ter esse direito respeitado pela coletividade.

Num sentido mais amplo, a noção de liberdade que Sen desenvolve se aproxima da ideia de liberdade republicana. A ideia de liberdade como não-dominação em contraste com não-interferência, separando republicanos de liberais pode parecer meramente uma questão semântica, sem sentido⁵. Considere os três casos a seguir:

1. Situação A: João é um escravo numa sociedade escravocrata e seu senhor trata João de forma perversa. Em particular, João é incapaz de escolher entre as opções x e y. Seu senhor faz a escolha por ele não levando a preferência de João em consideração.
2. Situação B: João é um escravo numa sociedade escravocrata e seu senhor trata João de forma cortês. Em particular, João é capaz de escolher entre as opções x e y. Seu senhor escolhe não interferir na escolha de João.
3. Situação C: João é um cidadão de um país liberal com uma série de direitos e garantias liberais constitucionais. Em particular, João é capaz de escolher entre as opções x e y. Ninguém estará em posição de interferência no processo de escolha de João.

Em qual situação João é livre para escolher entre as opções x e y? Evidente que João não é livre na opção A. Tanto a visão republicana quanto a visão liberal de liberdade concordam com isso pois João sofre a interferência e dominação. Na situação C, João não sofre interferência nem dominação, assim, pode-se dizer que, tanto os republicanos quanto os liberais concordam que nesta situação existe liberdade. Entretanto, o que dizer sobre a situação B? Nesta situação, João não é, atualmente, restrito nas suas escolhas entre x e y. Então, se interferência for definida como restrição, nesta situação não existe interferência, logo, para a tradição liberal, existiria liberdade. Observe que João, nesta situação, é claramente vulnerável a possíveis arbitrariedades: basta seu senhor mudar de ideia. Então, João sofre dominação e não é livre no sentido republicano.

⁵ Para uma completa caracterização sobre republicanismo ver Pettit (1999) e para uma comparação entre republicanismo, liberalismo e a obra de Sen, ver Pettit (2001), List (2004).

Isto ilustra que o ponto de corte entre republicano e liberal situa-se em como definir os limites de um e do outro. Para os liberais, tanto as situações B e C enquadrariam-se em situações de liberdade. Já para os republicanos apenas a situação C se adequa a ideia de liberdade como não-dominância.

Outra observação possível é refletir de uma forma mais profunda entre as distinções nas duas tradições. Para adotarmos a terminologia de Amartya Sen, podemos dizer que tantas as opções x e y fazem parte do conjunto de capacidade de João, pois se ele escolher x , o resultado será x . Logo, João é decisivo entre x e y . Na situação B, embora ambas as opções de escolhas pertençam a seu conjunto de capacidades, sua capacidade de decisão entre as duas opções não é robusta: depende da boa vontade de seu senhor, ou seja, apesar de ser decisivo neste estado do mundo, ele pode deixar de ser noutra estado do mundo, bastando para isso uma modificação na preferência do seu senhor em se tornar dominante, transformando a liberdade de João em uma liberdade condicional, contingente. Assim, é essa situação contingencial que torna essa aparente liberdade como não-liberdade.

Com essa característica de liberdade individual, Sen (1970) critica a ideia de se aceitar que uma regra de votação ou escolha social deva satisfazer os critérios de anonimato e neutralidade. Como dito no capítulo 3, anonimato implica em aceitar a ideia básica de que "cada pessoa, um voto". Ora, por que tal ideia, tão democrática, poderia violar direitos básicos? Pelo simples fato de que uma dada maioria poderia impor à uma minoria violação dos seus direitos básicos. Por sua vez, neutralidade implicaria em aceitar que todas as alternativas disponíveis deve ter o mesmo status e competir em igualdade. Onde está a violação ao direito básico? A violação reside, justamente, em permitir que, por exemplo, as alternativas de escolhas racistas e/ou de extermínio à minoria, poderiam co-existir, em pé de igualdade, com outras alternativas mais republicanas.

Então, para discutir liberdade individual e escolhas sociais, estas condições devem ser flexibilizadas. Assim, denomine a esfera privada de direito (D) do indivíduo i como D_i . Se este mesmo indivíduo tiver que escolher entre duas alternativas que pertençam à sua esfera de direito, então ele tem que ser decisivo sobre isso e essa escolha individual tem que ser respeitada na escolha social. Formalmente:

$$\begin{aligned}(x, y) \in D_i, xP_i y &\Rightarrow xPy \\ (x, y) \in D_i, yP_i x &\Rightarrow yPx\end{aligned}$$

Com isso, se tivermos duas pessoas, cada uma com seu círculo de direitos (D_1, D_2) e tivermos quatro escolhas (x, y, z, w) pode-se ter os seguintes direitos:

$$(x, y) \in D_1, xP_1y \Rightarrow xPy$$

$$(x, y) \in D_1, yP_1x \Rightarrow yPx$$

$$(z, w) \in D_2, zP_2w \Rightarrow zPw$$

$$(z, w) \in D_2, wP_2z \Rightarrow wPz$$

Logo, cada indivíduo tem o direito de decisão sobre seu conjunto de escolha, que pertence ao seu direito privado e, essa escolha, deve ser respeitada na escolha social. Recorde que Sen (1970, p.71-73) demonstrou os seguintes lemas:

Lema 5*b: Para qualquer regra de escolha coletiva, neutralidade (N) implica independência das alternativas irrelevantes (condição I).

Lema 5*c: Uma regra de escolha social para ser anônima (A) deve não ser ditatorial (condição D).

Lema 5*d: Uma regra de escolha social que seja neutra (N) e responsiva positivamente (S) satisfaz o princípio fraco de Pareto (condição P).

Dessa forma, como Sen (1970) rejeita as condições de anonimato e neutralidade, tem-se que, das quatro condições do teorema de Arrow, Sen aceita duas: domínio irrestrito e princípio fraco de Pareto. Além disso, ele acrescenta mais uma:

Condição Liberalismo (L): Para cada indivíduo i , existe um par de alternativa pessoal $(x, y) \in D_i$ tal que ele é decisivo no processo de escolha social.

Reescrevendo as outras duas do teorema de Arrow:

Condição Domínio Irrestrito (U): O domínio da função de escolha social deve incluir todas as possibilidades lógicas possíveis.

Condição fraco de Pareto (P): Se todos concordam que alternativa x é preferível à y então a escolha social tem que ser x .

Sen (1970) flexibilizou a condição de Liberalismo impondo que não há a necessidade de todos membros da sociedade deterem essa propriedade, exige-se que pelo menos dois tenham essa liberdade. Em função disso, ao invés de se falar de liberalismo, Sen denominou minimal liberalism (L^*)⁶.

Diante dessas três condições, Sen demonstrou que:

⁶ Mais tarde Sen (1977) denominou como sendo weak libertarianism ou minimal libertarianism.

Teorema Impossibilidade Liberal Paretiano: *Não existe função de decisão social que satisfaça, simultaneamente, as condições de domínio irrestrito (condição U), Pareto (condição P) e Liberalismo mínimo (condição L*).*

Para entender este teorema, observa-se o exemplo que Sen (1970, p.80-81) utilizou⁷. Imagine que só exista uma cópia do livro *O Amante de Lady Chatterley*⁸ de D. H. Lawrence e que só há tempo para uma pessoa ler o livro. Existem duas pessoas: Mr. A (o puritano) e Mr. B (o lascivo); e existem três alternativas:

r_A = Mr. A ler o livro sozinho

r_B = Mr. B ler o livro sozinho

r_0 = Ninguém ler o livro

Assume-se que cada indivíduo tem o poder de ser decisivo em não ler o livro e tem o direito de ler, caso o outro não leia. Assim, Mr. A, por ser puritano, prefere que ninguém leia o livro; mas se alguém for ler, ele prefere que ele leia do que o lascivo, Mr. B, pois prefere se prejudicar lendo do que deixar um lascivo mais eufórico. Já Mr. B, prefere constranger Mr. A, deixando que ele leia o livro; mas caso não queira, ele próprio ler é melhor do que ninguém ler. Temos então:

Mr. A : $r_0 \succ r_A \succ r_B$

Mr. B : $r_A \succ r_B \succ r_0$

Observe que Mr. A é decisivo sobre (r_A, r_0) e Mr. B é decisivo sobre (r_B, r_0) . Assim, diante da agenda (r_A, r_B, r_0) vemos que r_0 não será escolhido porque Mr. B é decisivo sobre essa opção e prefere r_B ; por sua vez, r_A não será escolhido porque Mr. A, que é decisivo entre r_A e r_0 e prefere r_0 ; finalmente, r_B não será escolhido porque r_A é Pareto superior à r_B para ambos. Logo, o conjunto de escolha é vazio porque tem intransitividade:

$r_B \succ r_0 \succ r_A \succ r_B$

⁷ Mesmo exemplo apresentado por Kelly (1988).

⁸ Para Sen: "In the early days of the 1960s I fear I was naive enough to choose as an example D. H. Lawrence's *Lady Chatterley's Lover*, which would hardly be recognized as controversial today. I was influenced by the fact that Penguin Books had just before that time fought and won a case in the British courts to be allowed to publish this book as a work of literature, rather than it being seen as forbidden pornography" (SEN, 2017a, p.566).

Dessa forma, o que o teorema nos diz é que há uma contradição entre as duas formas básicas de se avaliar estados sociais: princípio de Pareto e liberdade pessoal, daí o termo impossibilidade do liberal paretiano. Com isso, existe uma dificuldade em se adequar a ideia do critério de Pareto (unanimidade) como princípio normativo, que se baseia exclusivamente nas informações disponíveis nas utilidades, com a ideia de liberdade individual, que se baseia em outras informações, para além da utilidade, tais como moralidade, ética, etc. Assim, segundo Sen (1986), "The impossibility result captures the tension between the two" (SEN, 1986, p.1157).

O entendimento sobre este resultado suscitou muito debate. O próprio Sen afirma: "I have to confess that I was somewhat doubtful about the significance of this impossibility theorem, analytically interesting though it was" (SEN, 2017a, p.421). Entretanto, vários autores criticaram o tratamento dado por Sen e sua definição de direito individual (NOZICK, 1974; SUGDEN, 1985; GAERTNER; PATTANAIK; SUZUMURA, 1992). Por outro lado, sabe-se que o que está por trás desse resultado de Sen é o fato de existir externalidade nas ações: a escolha de um indivíduo causa impacto na escolha do outro. Logo, há interdependência nas ações, de tal forma que o uso da teoria dos jogos se revela um instrumento importante para tratar da questão dos direitos e liberdade dentro da teoria da escolha social (BERNHOLZ, 1982; KELLY, 1988; SAARI; PETRON, 2006).

Uma das possibilidades, então, de se afastar deste resultado de Sen seria a existência de acordos (contratos) entre os agentes de tal forma que pudessem "transacionar seus direitos". Para Sen, essa saída não seria razoável, pois não se trata de bens ou serviços e sim de direitos individuais. Mesmo se fosse aceite essa possibilidade, nada garante, a priori, a existência de um contrato completo. Mais ainda, mesmo sempre sendo possível desenhar um contrato e, por meio deste, alcançar um resultado Pareto-superior, ainda assim, tem-se um problema, pois o que o teorema de Sen quer ressaltar é, justamente, a inadequação entre este princípio de Pareto e a liberdade individual.

4.4 Conclusões

Os resultados centrais aqui apresentados - teoremas de Arrow, Gibbard-Satterthwaite e Sen - bem como todos os derivados deles ressaltam, por um lado, a dificuldade em se tratar de questões de natureza coletiva; por outro lado, evidencia os desafios que esse campo de pesquisa possibilita para uma análise mais acurada sobre os mecanismos por trás das escolhas sociais.

Se no princípio o resultado da impossibilidade de Arrow fez surgir uma nova área de pesquisa, deu-se a impressão que, com esse mesmo resultado (da impossibilidade) pudesse encerrar o campo de pesquisa. Entretanto, exatamente o oposto se deu. Novos caminhos e

possibilidades foram incorporados à discussão sobre escolhas sociais.

Antes de finalizar a seção, cabem alguns comentários gerais sobre esses novos caminhos da teoria da escolha social⁹. Primeiro, do ponto de vista das regras de votação, observou-se que, com duas alternativas de escolha, a regra de maioria simples era a única que respeitava os princípios normativos básicos; com mais de duas alternativas de escolha, não haveria um correspondente tão bom. Entretanto, resultados recentes elaborados por [Dasgupta e Maskin \(2008\)](#), demonstraram que, apesar de não existir uma regra que não viole os axiomas básicos, existiria uma regra que seria a mais robusta: a regra de maioria simples. Robustez aqui implica que se as preferências dos eleitores forem consistentes em qualquer outra regra, também seria com a regra da maioria simples. Por outro lado, o contrário não é verdadeiro: consistência na regra de maioria, não implica consistência nas outras regras. Dessa forma, o teorema de [Dasgupta e Maskin \(2008\)](#) informa que a regra da maioria é o procedimento de agregação de preferência mais robusto. Para [Maskin \(2001\)](#):

What is the moral of this story? One possible lesson comes from the observation that majority rule is used by virtually every democratic legislature in the world. It may be no accident that the theoretically most robust voting method is also the method with the greatest popularity. But even if one ignores that connection, I think it is still notable from a normative point of view that there is a precise sense in which majority rule does a better job than any other electoral rule in representing voters' views. So perhaps the next time the Senate passes some absurd bill, you can take consolation from the notion that although they may not have chosen correctly, they at least used the correct method for choosing ([MASKIN, 2001](#), p.10).

Evidente que este resultado é importante. Entretanto, como afirma [Sen \(2017a\)](#):

Majority rule does, of course, have many merits well known to political theorists – and, indeed, to the public as a whole. It is, however, important to recognize that, when it comes to welfare economics, majority decision is not a particularly just, or even a plausible, way of judging alternatives. A majority of relatively prosperous people can, in search of their own gain, overwhelm a minority of the poorest and the most miserable. To follow the verdicts of the majority rule in such cases would be particularly unjust ([SEN, 2017a](#)).

Em segundo lugar, e dialogando com a questão anterior, o reconhecimento e a incorporação sobre a centralidade da liberdade e dos direitos individuais, dentro do

⁹ Os comentários aqui apresentados foram, originalmente, ressaltados por Sen na apresentação da nova edição de seu livro clássico de 1970 ([SEN, 2017a](#)).

arcabouço formal da teoria da escolha social foi, ao mesmo tempo, um avanço, e um acerto de conta histórico com a própria disciplina. Autores do Iluminismo, radicais na proposição de modificações estruturais na sociedade e de formas mais democráticas de representação dos interesses individuais, que estão na origem das ideias da escolha social (Condorcet, Thomas Paine, Mary Wollstonecraft e John Stuart Mill) foram sendo, ao longo do tempo, deixados de lado. Neste sentido, o desenvolvimento promovido por Amartya Sen ao longo dos anos, recupera esta origem.

Terceiro, existe uma nítida relação entre o desenvolvimento da teoria da escolha social e a construção de indicadores sociais e econômicos (indicadores de pobreza, desigualdade, mobilidade social, nível de vida etc.), ressaltando aplicações em problemas práticos (avaliação de políticas públicas, aplicação de análise de bem-estar, direitos humanos, justiça etc) e auxiliando no desenho de regras mais republicanas (SEN, 1970; d'Aspremont; GEVERS, 2002; FLEURBAEY; MANIQUET, 2011).

Para Sen (2017a), uma das mais importantes áreas de avanços da teoria da escolha social se deu na modificação dos requisitos de racionalidade. Um ranking social de ordem parcial (preferências incompletas e transitivas) apresenta amplas possibilidades analíticas. Sabe-se que um ranking completo implica em ordenar todos os pares de alternativas, ou seja, temos que ser capazes de afirmar que, ou a alternativa x é melhor que y , ou que y é melhor que x ou, ainda, que somos indiferentes entre elas. Por sua vez, uma ordem parcial implica em aceitar que, por algumas circunstâncias, não somos capazes de ordenar todas as alternativas (perceba que, não ser capaz de ordenar não implica dizer que são indiferentes). Tecnicamente, Sen (2017a) explica, uma ordem completa significa que, ao formarmos ranking das alternativas, estamos escolhendo a alternativa melhor (ótima). Por outro lado, uma ordem parcial implica em termos alternativas maximais, mas não ótimas. Assim, tem-se alternativas que, pelo menos, não são piores entre si. Nas palavras de Sen (2017a):

The admission of partial orderings vastly expands the applicability of social choice theory. This makes it possible, for example, to arrive at practical solutions despite some remaining disagreement, since the partial ranking of agreement may allow us to do many useful things. There may well be little hope of complete agreement, for example, on what to do in taking care of the global environment (or, more particularly, in trying to prevent global warming), or on what must be done urgently to try to curb global pandemics, or remove medical neglect across the world. And yet we can, with adequate public discussion and active advocacy, hope to get agreement on partial remedies that need not await a complete resolution of all our differences (SEN, 2017a).

Seguindo o desenvolvimento de Sen, a possibilidade de adequar a teoria da escolha social à discussão pública, implica em reconhecer o pioneirismo de autores como Condorcet, Smith, Kant, Mill e Marx. E afirma:

In the new emphasis on public reasoning, Arrow's theorem, and other results inspired by it, played a big part, but a leading role was also played by the constructive efforts of James Buchanan – following John Stuart Mill and Frank Knight – to advance the understanding of democracy as ‘government by discussion’ (SEN, 2017a).

Assim, fica evidente que não há nenhuma contradição numa convergência entre a teoria da escolha social e a teoria democrática moderna pois a ênfase na deliberação e discussão pública, que faz parte da filosofia política moderna, se adequa bem à teoria da escolha social.

5 Conclusão

O objetivo desse trabalho foi apresentar alguns dos resultados mais importantes dentro da teoria da escolha social. Para alcançar este objetivo, apresentou-se no segundo capítulo a historicidade da construção teórica sobre escolhas coletivas partindo de preferências individuais. Discutiu-se que o utilitarismo, entendido como uma junção de três axiomas básicos (consequencialismo, welfarismo e ranking pela soma) sustenta o constructo filosófico. Apresentou-se também que, ao longo do tempo, diferentes formas de se representar a utilidade foi posto em discussão (utilidade cardinal e ordinal) como uma tentativa de melhor representar as escolhas individuais. Além disso, do ponto de vista histórico, discussões sobre os fundamentos dos procedimentais das regras de votação antecederam a própria construção filosófica utilitarista.

Na sequência, discutiu-se quais critérios normativos as regras de votação deveriam respeitar. A ideia foi apresentar um conjunto de critérios básicos que, visto isoladamente, captaria, em alguma medida, uma noção de se ter regras democráticas. Sabendo que regras procedimentais de votação não devem ser analisadas partindo de critérios isolados, avaliou-se distintas regras de votação que respeitavam todos os critérios simultaneamente. Neste particular, para efeito didático, separou-se a análise em dois conjuntos: avaliação com duas e com mais de duas alternativas de escolhas. Quando se tem a necessidade de escolher entre apenas duas alternativas, viu-se que, a regra de votação por maioria simples é a única regra que não violava nenhum dos critérios normativos básicos apresentados e que tal resultado era corroborado pelo importante teorema de [May \(1952\)](#).

Entretanto, quando se analisava os procedimentos de votação para mais de duas alternativas de escolhas, nenhuma regra de votação sairia imune, ou seja, todas as regras apresentadas violava algum critério normativo básico. Além disso, discutiu-se que, mesmo mantendo constante as preferências dos eleitores, o resultado coletivo que emerge do processo eleitoral poderia refletir muito mais sobre a regra de votação do que as preferências individuais. Dessa forma, se cada regra pode apresentar um resultado, como saber, de fato, qual a preferência social? Será que não existe uma regra que possa ser vista como mais adequada?

A partir desta dificuldade em encontrar uma regra de votação que respeitasse, simultaneamente, os princípios normativos básicos, abriu-se caminho, no capítulo quatro, para apresentação dos teoremas de impossibilidades. O primeiro resultado relevante da moderna teoria da escolha social foi o teorema de [Arrow \(1951\)](#). No capítulo foi feita uma

discussão, não formal, sobre como interpretar cada um dos axiomas que dão sustentação ao teorema. Além disso, discutiu-se como modificar o resultado da impossibilidade, tornando-o possível se falar em escolhas sociais. Neste quesito, com a possibilidade de se flexibilizar o axioma domínio irrestrito, abre-se caminho para um diálogo importante entre a teoria da escolha social e a teoria democrática pois se o objetivo é construir certas coesões nas preferências sociais um caminho natural seria mecanismos deliberativos de diálogo e discussão pública (MILLER, 1983; DRYZEK; LIST, 2003; SEN, 2017a).

O trabalho de Arrow fez com que, para além de se buscar mecanismos de flexibilidade para escapar da impossibilidade, surgissem novas áreas de pesquisa. A possibilidade de se ter preferências numa estrutura estratégica, foi um caminho natural. Assim, foram apresentados os teoremas de Gibbard (1973) e Satterthwaite (1975) que demonstraram, justamente, outra impossibilidade, qual seja, de ser impossível ter regra de escolha coletiva que esteja imune à manipulação das preferências. Outra possibilidade aberta com o teorema de Arrow foi construir regras de escolhas sociais que pudessem levar em consideração os direitos e liberdades individuais. Com isso, apresentou-se o teorema da impossibilidade do liberal paretiano de Sen (1970) que demonstrou existir uma contradição entre a forma mais importante de se avaliar critérios sociais (regra de eficiência de Pareto) e o próprio respeito às liberdades individuais.

Por fim, apresentou-se os rumos que foram abertos pela moderna teoria da escolha social para além das impossibilidades, discutindo como os resultados, que aparentemente dão conotações negativas às formas democráticas de escolha coletiva, devem ser analisados por uma outra perspectiva. Sen (2017a) vem discutindo que os resultados de impossibilidades são frutos da pobreza informacional gerada pela exclusividade do uso da utilidade no processo de escolha social. Para ele, se ampliarmos a base informacional para além das utilidades, a teoria da escolha social recuperaria seu papel transformador que sempre teve com autores como Condorcet, Mill, Paine, Wollstonecraft e Smith, abrindo ampla possibilidade de se adequar a teoria da escolha social à discussão pública.

Referências

ANDERSON, E. Slingshot Arrows at Democracy: Social Choice Theory, Value Pluralism, and Democratic Politics. *Columbia Law Review*, 1990. Citado na página 18.

ARROW, K. J. *Social Choice and Individual Values*. (Cowles Commission Mongr. No. 12.). Oxford, England: Wiley, 1951. xi, 99 p. (Social Choice and Individual Values. (Cowles Commission Mongr. No. 12.)). Citado 12 vezes nas páginas 7, 8, 17, 22, 31, 32, 87, 88, 91, 97, 100 e 116.

ARROW, K. J. Le principe de rationalité dans les décisions collectives. *Économie appliquée*, v. 5, p. 469–484, 1952. Citado 2 vezes nas páginas 85 e 104.

ARROW, K. J. General economic equilibrium: Purpose, analytic techniques, collective choice. *The American Economic Review*, American Economic Association, v. 64, n. 3, p. 253–272, 1974. ISSN 00028282. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1808881>>. Citado na página 17.

ASSIS, M. de. Papeis avulsos. Rio de Janeiro : Lombaerts, 1882. Citado na página 19.

AYER, A. J. *Language, Truth and Logic*. Oxford, England: Ryerson Press, 1936. 254 p. (Language, Truth and Logic). Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

BALINSKI, M.; LARAKI, R. *Majority Judgment: Measuring, Ranking, and Electing*. The MIT Press, 2011. v. 1. (MIT Press Books, 0262015137). ISBN ARRAY(0x485c7260). Disponível em: <<https://ideas.repec.org/b/mtp/titles/0262015137.html>>. Citado na página 102.

BAUJARD, A. *A Utility Reading for the History of Welfare Economics*. [S.l.], 2015. Citado na página 30.

BENTHAM, J. *A Fragment on Government*. New authoritative ed. Cambridge [England] ; New York: Cambridge University Press, 1798. (Cambridge Texts in the History of Political Thought). ISBN 978-0-521-35054-9 978-0-521-35929-0. Citado 4 vezes nas páginas 25, 26, 27 e 100.

BERGSON, A. A reformulation of certain aspects of welfare economics. *The Quarterly Journal of Economics*, Oxford University Press, v. 52, n. 2, p. 310–334, 1938. ISSN 00335533, 15314650. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1881737>>. Citado na página 30.

BERNHOLZ, P. Externalities as a Necessary Condition for Cyclical Social Preferences. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 97, n. 4, p. 699–705, nov. 1982. ISSN 0033-5533. Citado na página 112.

BLACK, D. On the Rationale of Group Decision-making. *Journal of Political Economy*, The University of Chicago Press, v. 56, n. 1, p. 23–34, fev. 1948. ISSN 0022-3808. Citado 2 vezes nas páginas 99 e 100.

- BLACK, D. *The Theory of Committees and Elections*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1958. ISBN 978-0-89838-189-4. Citado 5 vezes nas páginas [32](#), [45](#), [46](#), [97](#) e [106](#).
- BLAIR, D. H.; POLLAK, R. A. Acyclic Collective Choice Rules. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 50, n. 4, p. 931–943, 1982. ISSN 0012-9682. Citado na página [93](#).
- BLAU, J. H.; DEB, R. Social Decision Functions and the Veto. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 45, n. 4, p. 871–879, 1977. ISSN 0012-9682. Citado na página [93](#).
- BORDA, J. de. Mémoire sur les élections au scrutin. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences pour 1781 (Paris, 1784)*, 1784. Citado na página [43](#).
- BROWN, D. J. Aggregation of Preferences. *The Quarterly Journal of Economics*, Oxford University Press, v. 89, n. 3, p. 456–469, 1975. Citado 2 vezes nas páginas [71](#) e [93](#).
- BUCHANAN, J. M. Social Choice, Democracy, and Free Markets. *Journal of Political Economy*, University of Chicago Press, v. 62, p. 114–114, 1954. Citado 2 vezes nas páginas [91](#) e [92](#).
- CAMPBELL, D. E.; KELLY, J. S. Social welfare functions generating social choice rules that are invulnerable to manipulation. *Mathematical social sciences*, Elsevier, v. 51, n. 1, p. 81–89, jan. 2006. ISSN 0165-4896. Citado 2 vezes nas páginas [101](#) e [102](#).
- COLOMER, J. (Ed.). *The Handbook of Electoral System Choice*. [S.l.]: Palgrave Macmillan UK, 2004. ISBN 978-1-4039-0454-6. Citado 4 vezes nas páginas [32](#), [33](#), [34](#) e [35](#).
- CONDORCET, J.-A.-N. d. C. -. . m. d. A. du texte. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix ([Reprod.]) / par M. le marquis de Condorcet,...* [S.l.: s.n.], 1785. Citado na página [41](#).
- DAHL, R. A. *A Preface to Democratic Theory*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1956. ISBN 978-0-226-13426-0. Citado 2 vezes nas páginas [18](#) e [69](#).
- DAHL, R. A. *Democracy and Its Critics*. [S.l.]: Yale University Press, 1989. ISBN 978-0-300-04938-1. Citado na página [69](#).
- DASGUPTA, P.; MASKIN, E. On the Robustness of Majority Rule. *Journal of the European Economic Association*, v. 6, n. 5, p. 949–973, 2008. ISSN 1542-4774. Citado na página [113](#).
- d'Aspremont, C.; GEVERS, L. Social welfare functionals and interpersonal comparability. In: *Handbook of Social Choice and Welfare*. [S.l.]: Elsevier, 2002. v. 1, p. 459–541. Citado na página [114](#).
- de Scitovszky, T. A Note on Welfare Propositions in Economics. *The Review of Economic Studies*, v. 9, n. 1, p. 77–88, nov. 1941. ISSN 0034-6527. Citado na página [30](#).
- DODGSON, C. A method of taking votes on more than two issues. *The theory of committees and elections*, Cambridge University Press, 1876. Citado 4 vezes nas páginas [9](#), [45](#), [46](#) e [104](#).
- DOWNS, A. *An Economic Theory of Democracy*. [S.l.]: Harper, 1957. ISBN 978-0-06-041750-5. Citado na página [100](#).

- DRIVER, J. *Consequentialism*. [S.l.]: Routledge, 2012. ISBN 978-0-415-77258-7. Citado na página 24.
- DRYZEK, J. S. *Deliberative Democracy and Beyond: Liberals, Critics, Contestations*. [S.l.]: Oxford University Press, 2000. ISBN 978-0-19-171725-3. Citado na página 18.
- DRYZEK, J. S.; LIST, C. Social Choice Theory and Deliberative Democracy: A Reconciliation. *British Journal of Political Science*, Cambridge University Press, v. 33, n. 1, p. 1–28, jan. 2003. ISSN 1469-2112, 0007-1234. Citado na página 117.
- EDGEWORTH, F. Y. *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*. [S.l.]: C.K. Paul & co., 1881. Citado na página 28.
- ELSTER, J. (Ed.). *Deliberative Democracy*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. (Cambridge Studies in the Theory of Democracy). ISBN 978-0-521-59296-3. Citado na página 18.
- FARQUHARSON, R. *Theory of Voting*. Tese (Doutorado) — Blackwell, Oxford, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 104.
- FLEURBAEY, M.; MANIQUET, F. *A Theory of Fairness and Social Welfare*. [S.l.], 2011. Citado na página 114.
- FOLEY, D. K. Resource allocation and the public sector. *Yale economic essays*, v. 7, n. 1, 1967. Citado na página 31.
- GAERTNER, W. De jure naturae et gentium: Samuel von Pufendorf's contribution to social choice theory and economics. *Social Choice and Welfare*, v. 25, n. 2, p. 231–241, dez. 2005. ISSN 1432-217X. Citado na página 41.
- GAERTNER, W.; PATTANAIK, P. K.; SUZUMURA, K. Individual Rights Revisited. *Economica*, [London School of Economics, Wiley, London School of Economics and Political Science, Suntory and Toyota International Centres for Economics and Related Disciplines], v. 59, n. 234, p. 161–177, 1992. ISSN 0013-0427. Citado na página 112.
- GIBBARD, A. Manipulation of Voting Schemes: A General Result. *Econometrica*, Econometric Society, v. 41, n. 4, p. 587–601, 1973. Citado 7 vezes nas páginas 7, 8, 22, 92, 104, 105 e 117.
- HABERMAS, J. *The Theory of Communicative Action: Reason and the Rationalization of Society, Volume 1*. 1ª edição. ed. [S.l.]: Polity, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 22.
- HARSANYI, J. C. Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparisons of utility. *Journal of Political Economy*, v. 63, n. 4, p. 309–321, 1955. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/257678>>. Citado na página 100.
- HAYEK, F. *The Constitution of Liberty*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1960. ISBN 978-0-226-32073-1. Citado na página 108.
- HICKS, J. *Value and Capital: An Inquiry Into Some Fundamental Principles of Economic Theory*. [S.l.]: Clarendon Press, 1939. Citado na página 29.
- HICKS, J. R. The Foundations of Welfare Economics. *The Economic Journal*, [Royal Economic Society, Wiley], v. 49, n. 196, p. 696–712, 1939. ISSN 0013-0133. Citado na página 30.

- INADA, K.-i. The Simple Majority Decision Rule. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 37, n. 3, p. 490–506, 1969. ISSN 0012-9682. Citado na página 99.
- JEVONS, W. S. *The Theory of Political Economy*. [S.l.], 1871. Citado na página 27.
- JR, E. A. R.; ULLMAN, D. H. *A Mathematical Look at Politics*. [S.l.]: CRC Press, 2010. ISBN 978-1-4398-9117-9. Citado 5 vezes nas páginas 48, 51, 68, 77 e 79.
- KALDOR, N. Welfare Propositions of Economics and Interpersonal Comparisons of Utility. *The Economic Journal*, [Royal Economic Society, Wiley], v. 49, n. 195, p. 549–552, 1939. ISSN 0013-0133. Citado na página 30.
- KELLY, J. S. *Social Choice Theory: An Introduction*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1988. ISBN 978-3-662-09927-8. Citado 2 vezes nas páginas 111 e 112.
- LANGE, O. The Foundations of Welfare Economics. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 10, n. 3/4, p. 215–228, 1942. ISSN 0012-9682. Citado na página 30.
- LIJPHART, A. Consociational Democracy. *World Politics*, [Cambridge University Press, Trustees of Princeton University], v. 21, n. 2, p. 207–225, 1969. ISSN 0043-8871. Citado na página 83.
- LIST, C. The impossibility of a Paretian republican? Some comments on Pettit and Sen. *Economics and Philosophy*, Cambridge University Press, v. 20, n. 1, p. 65–87, abr. 2004. ISSN 0266-2671. Citado na página 108.
- LITTLE, I. M. D. *A Critique of Welfare Economics*. [S.l.], 2002. Citado na página 30.
- MACKIE, G. *Democracy Defended*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. (Contemporary Political Theory). ISBN 978-0-521-82708-9. Citado na página 18.
- MARSHALL, A. *Principles of Economics*. [S.l.]: www.WealthOfNation.com, 1890. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 30.
- Mas-Colell, A.; SONNENSCHNEIN, H. General Possibility Theorems for Group Decisions. *The Review of Economic Studies*, v. 39, n. 2, p. 185–192, abr. 1972. ISSN 0034-6527. Citado na página 92.
- MASKIN, E. *Is Majority Rule the Best Election Method*. 2001. /paper/Is-Majority-Rule-the-Best-Election-Method-Maskin/b8e70d4a52e5325c5f27621cfbbddd953efb02b7. Citado na página 113.
- MAY, K. O. A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 20, n. 4, p. 680–684, 1952. ISSN 0012-9682. Citado 10 vezes nas páginas 22, 47, 51, 52, 69, 79, 83, 84, 88 e 116.
- MCLEAN, I. The borda and condorcet principles: Three medieval applications. *Social Choice and Welfare*, v. 7, n. 2, p. 99–108, abr. 1990. ISSN 1432-217X. Citado na página 32.
- MCLEAN, I. Independence of irrelevant alternatives before Arrow. *Mathematical Social Sciences*, v. 30, n. 2, p. 107–126, out. 1995. ISSN 0165-4896. Citado na página 45.
- MCLEAN, O. F. i. P. I. et al. *Classics of Social Choice*. [S.l.]: University of Michigan Press, 1995. ISBN 978-0-472-10450-5. Citado 5 vezes nas páginas 32, 36, 38, 39 e 40.

- MENGER, C. *Principles of Economics*. [S.l.]: Ludwig von Mises Institute, 1871. Citado na página 27.
- MIGUEL, L. F. Sorteios e representação democrática. *Lua Nova: Revista de Cultura e Política*, n. 50, p. 69–96, 2000. ISSN 0102-6445. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.
- MILL, J. S. *Considerations on Representative Government*. [S.l.]: Parker, Son, and Bourn, 1861. ISBN 978-1-4142-5468-5. Citado 4 vezes nas páginas 25, 26, 27 e 108.
- MILLER, N. R. Pluralism and Social Choice. *The American Political Science Review*, [American Political Science Association, Cambridge University Press], v. 77, n. 3, p. 734–747, 1983. ISSN 0003-0554. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 117.
- MOULIN, H. On strategy-proofness and single peakedness. *Public Choice*, Springer, v. 35, n. 4, p. 437–455, 1980. ISSN 0048-5829. Citado 2 vezes nas páginas 106 e 107.
- NOZICK, R. *Anarchy, State, and Utopia*. [S.l.]: Basic Books, 1974. ISBN 978-0-465-09720-3. Citado na página 112.
- PARETO, V. *Cours d'économie politique*. [S.l.]: Librairie Droz, 1896. ISBN 978-2-600-04014-3. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- PATTANAIK, P. K. Counter-threats and strategic manipulation under voting schemes. *The Review of Economic Studies*, [Oxford University Press, Review of Economic Studies, Ltd.], v. 43, n. 1, p. 11–18, 1976. ISSN 00346527, 1467937X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2296596>>. Citado na página 107.
- PETTIT, P. *Consequentialism*. Aldershot ; Brookfield, USA: Dartmouth, 1993. (International Research Library of Philosophy, 6). ISBN 978-1-85521-304-3. Citado na página 24.
- PETTIT, P. *Republicanism: A Theory of Freedom and Government*. [S.l.]: Oxford University Press, 1999. ISBN 978-0-19-160008-1. Citado na página 108.
- PETTIT, P. Capability and Freedom: A Defence of Sen. *Economics and Philosophy*, v. 17, p. 1–20, jan. 2001. Citado na página 108.
- PIGOU, A. C. *Wealth and welfare*. [S.l.]: Macmillan and Company, limited, 1912. Citado na página 30.
- PIGOU, A. C. *The Economics of Welfare*. [S.l.]: Macmillan and Company, limited, 1920. Citado na página 30.
- POUNDSTONE, W. *Gaming the Vote: Why Elections Aren't Fair (and What We Can Do About It)*. [S.l.]: Farrar, Straus and Giroux, 2008. ISBN 978-0-8090-4893-9. Citado na página 71.
- RAWLS, J. *A theory of justice*. Cambridge, Mass.: Belknap Press of Harvard University Press, 1971. ISBN 978-0-674-04260-5. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 100.
- RIKER, W. *Liberalism against Populism: A Confrontation between the Theory of Democracy and the Theory of Social Choice*. [S.l.]: Waveland Press, 1982. ISBN 978-0-88133-367-1. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

- ROBBINS, L. Interpersonal Comparisons of Utility: A Comment. *The Economic Journal*, [Royal Economic Society, Wiley], v. 48, n. 192, p. 635–641, 1938. ISSN 0013-0133. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 30.
- SAARI, D. G. Mathematical Structure of Voting Paradoxes: I. Pairwise Votes. *Economic Theory*, Springer, v. 15, n. 1, p. 1–53, 2000. ISSN 0938-2259. Citado na página 102.
- SAARI, D. G. *Decisions and Elections: Explaining the Unexpected*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. ISBN 978-0-521-80816-3. Citado na página 101.
- SAARI, D. G.; PETRON, A. Negative externalities and sen's liberalism theorem. *Economic Theory*, Springer, v. 28, n. 2, p. 265–281, 2006. ISSN 09382259, 14320479. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/25056072>>. Citado na página 112.
- SAMUELSON, P. A. A Note on the Pure Theory of Consumer's Behaviour. *Economica*, [London School of Economics, Wiley, London School of Economics and Political Science, Suntory and Toyota International Centres for Economics and Related Disciplines], v. 5, n. 17, p. 61–71, 1938. ISSN 0013-0427. Citado na página 29.
- SAMUELSON, P. A. *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge: Harvard University Press, 1947. Citado na página 30.
- SATTERTHWAITE, M. A. Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 187–217, 1975. ISSN 0022-0531. Citado 7 vezes nas páginas 7, 8, 22, 104, 105, 106 e 117.
- SEN, A. *Collective Choice and Social Welfare*. [S.l.]: Holden-Day, 1970. ISBN 978-0-8162-7765-0. Citado 14 vezes nas páginas 7, 8, 22, 88, 90, 92, 100, 101, 108, 109, 110, 111, 114 e 117.
- SEN, A. Social Choice Theory: A Re-examination. *Econometrica*, Econometric Society, v. 45, n. 1, p. 53–89, 1977. Citado na página 110.
- SEN, A. Social choice theory. In: _____. *Handbook of Mathematical Economics, Vol. III*. Amsterdam: North Holland, 1986. Citado na página 112.
- SEN, A. *The Idea of Justice*. [S.l.]: Harvard University Press, 2009. ISBN 978-0-674-03613-0. Citado na página 48.
- SEN, A. *Collective Choice and Social Welfare: Expanded Edition*. [S.l.]: Penguin UK, 2017. ISBN 978-0-241-24460-9. Citado 7 vezes nas páginas 23, 111, 112, 113, 114, 115 e 117.
- SEN, A. Social Choice. In: *The New Palgrave Dictionary of Economics*. London: Palgrave Macmillan UK, 2017. p. 1–20. ISBN 978-1-349-95121-5. Citado na página 24.
- SEN, A.; PATTANAIK, P. K. Necessary and sufficient conditions for rational choice under majority decision. *Journal of Economic Theory*, v. 1, n. 2, p. 178–202, 1969. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:jetheo:v:1:y:1969:i:2:p:178-202>>. Citado na página 99.
- SEN, A. K. A Possibility Theorem on Majority Decisions. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 34, n. 2, p. 491–499, 1966. ISSN 0012-9682. Citado na página 99.

- SUGDEN, R. Liberty, Preference, and Choice. *Economics and Philosophy*, Cambridge University Press, v. 1, n. 2, p. 213–229, 1985. Citado na página 112.
- SUZUMURA, K. *Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. ISBN 978-0-521-12255-9. Citado na página 48.
- SUZUMURA, K. *Choice, preferences, and procedures: a rational choice theoretic approach*. [S.l.]: Harvard University Press, 2016. Citado na página 46.
- TVERSKY, A. Intransitivity of preferences. *Psychological Review*, American Psychological Association, US, v. 76, n. 1, p. 31–48, 1969. ISSN 1939-1471(Electronic),0033-295X(Print). Citado na página 90.
- VARIAN, H. R. Two problems in the theory of fairness. *Journal of Public Economics*, v. 5, n. 3, p. 249–260, abr. 1976. ISSN 0047-2727. Citado na página 31.
- WALLIS, W. D. *The Mathematics of Elections and Voting*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2014. ISBN 978-3-319-09809-8. Citado na página 79.
- WALRAS, L. *Elements of Pure Economics: Or the Theory of Social Wealth*. [S.l.]: Psychology Press, 1874. ISBN 978-0-415-31340-7. Citado na página 27.
- YOUNG, H. P. Social choice scoring functions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 28, n. 4, p. 824–838, 1975. ISSN 00361399. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2100365>>. Citado na página 102.
- ZECKHAUSER, R. Voting systems, honest preferences and pareto optimality. *American Political Science Review*, Cambridge University Press, v. 67, n. 3, p. 934–946, 1973. Citado na página 107.